Terminale Spé Maths – Chapitre P-03

LOI DES GRANDS NOMBRES

Table des matières

I Sommes de variables aléatoires

1) Quelques rappels si nécessaire

DÉFINITION

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

On lance un dé cubique équilibré. Si le 6 sort, on gagne 5 euros, sinon on perd 1 euro.
$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ et $X(1) = -1$, $X(2) = -1$, … , $X(6) = 5$.

DÉFINITIONS

Soit n un entier naturel et soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, …, x_n.
On pose, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $p_i = P(X = x_i)$.

- L'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$.
- La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

PROPRIÉTÉS admises

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire. On peut obtenir deux autres écritures possibles de la variance de X :

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Formule de König-Huyghens)
- $V(X) = E((X - E(X))^2)$ (Par définition)

DÉMONSTRATION

• Supposons que X prenne les valeurs x_1, x_2, ... , x_n :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2 - 2x_iE(X) + E(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + E(X)^2\sum_{i=1}^{n} p_i. \end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 = E(X^2)$; $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

• Par définition, la variance de X est la moyenne des carrés des écarts de X à sa moyenne, d'où le résultat.
On peut le démontrer algébriquement (voir dans la suite du cours).

DÉFINITIONS

• Deux événements A et B sont **incompatibles** $\iff A \cap B = \varnothing \iff P(A \cap B) = 0$.

• Deux événements A et B sont **indépendants** $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

PROPRIÉTÉ admise

Soient A et B deux événements. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2) Définitions

DÉFINITIONS

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et soit a un réel.

• La variable aléatoire Z définie pour tout élément $\omega \in \Omega$ par $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ est notée $X + Y$, et est appelée la **somme des variables aléatoires X et Y**.

• La variable aléatoire Y définie pour tout élément $\omega \in \Omega$ par $Y(\omega) = aX(\omega)$ est notée aX.

REMARQUES

• On définit de la même manière la somme de n variables aléatoires, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$.

• On peut définir de la même manière la variable aléatoire $X - Y$.

EXEMPLE

On lance deux dés équilibrés, l'un à 4 faces numérotées de 1 à 4, et l'autre à 6 faces numérotées de 1 à 6.

L'univers ici est $\Omega = \{(i\,;j),\text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant 4 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.

On appelle X et Y les variables aléatoires qui associent respectivement, à un lancer des dés, les résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

On a alors :

$$X : \Omega \longrightarrow [\![1\,;4]\!] \qquad \text{et } Y : \Omega \longrightarrow [\![1\,;6]\!]$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) \qquad\qquad \omega \longmapsto Y(\omega)$$

Par exemple, $X((2\,;1)) = 2$, $X((2\,;4)) = 2$, $X((3\,;6)) = 3$ et $\forall i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant i \leqslant 4$, $Y((i\,;4)) = 4$.

• $X + Y$ est la variable aléatoire qui associe à un lancer des dés la somme des résultats des deux dés :

Les variables X et Y sont **indépendantes** (puisque le résultat d'un dé ne dépend du résultat de l'autre dé), donc les valeurs prises par $X + Y$ sont toutes les sommes possibles des valeurs de X avec celles de Y, soit ici tous les entiers compris entre 2 et 10. (On peut réaliser un tableau en double entrée pour toutes les lister au besoin).

Ainsi, on a :
$$X + Y : \Omega \longrightarrow [\![2\,;10]\!]$$
$$\omega \longmapsto (X + Y)(\omega)$$

Par exemple, $(X + Y)((2\,;6)) = X((2\,;6)) + Y((2\,;6)) = 2 + 6 = 8$.

Calculer $P(X + Y = 2)$ et $P(X + Y = 3)$:

$$\begin{aligned}
P(X + Y = 2) &= P((X\,;Y) = (1\,;1)) \\
&= P((X = 1) \cap (Y = 1)) \\
&= P(X = 1) \times P(Y = 1) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ sont des variables aléatoires indépendantes)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{24}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X + Y = 3) &= P(\{(X\,;Y) = (1\,;2)\} \cup \{(X\,;Y) = (2\,;1)\}) \\
&= P((X,Y) = (1\,;2)) + P((X\,;Y) = (2\,;1)) \qquad (*) \\
&= P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 2) \qquad (**) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{12}}
\end{aligned}$$

(*) : car les événements $(X\,;Y) = (1\,;2)$ et $(X\,;Y) = (2\,;1)$ sont incompatibles.
(**) : car les variables X et Y sont indépendantes.

• $2X$ est la variable aléatoire qui associe à un lancer des dés le double du résultat obtenu par le premier dé.

On a alors :
$$2X : \Omega \longrightarrow \{2\,;4\,;6\,;8\}$$
$$\omega \longmapsto (2X)(\omega)$$

Calculer $P(2X = 6)$:

$$P(2X = 6) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$$

REMARQUE

Attention, dans le cas où X et Y ne sont pas indépendantes, les valeurs prises par $X+Y$ ne sont pas nécessairement toutes les sommes possibles des valeurs de X avec celles de Y.

EXEMPLE

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. L'univers ici est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Soit X la variable aléatoire qui à un lancer du dé associe le numéro obtenu.
Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Par exemple, $X(3) = 3$ et $X(4) = 4$.

Soit Y la variable aléatoire qui, à un lancer du dé, associe le réel 0 si le numéro obtenu est impair, et le réel 10 si le numéro obtenu est pair.
Les valeurs prises par Y sont donc 0 et 10. Par exemple, $Y(3) = 0$ et $Y(4) = 10$.

Soit alors Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.
Par disjonction de cas, si le numéro sorti est impair, Z prend la valeur de ce numéro $+0$.
Et si le numéro sorti est pair, Z prend la valeur de ce numéro $+10$.
Ainsi, les valeurs prises par Z sont 1, 3, 5, 12, 14 et 16.
Par exemple, $Z(2) = X(2) + Y(2) = 2 + 10 = 12$ et $Z(5) = X(5) + Y(5) = 5 + 0 = 5$.

Mais il n'existe par exemple aucun élément ω de Ω tel que $Z(\omega) = 11$, alors qu'il existe bien un élément $\omega_1 \in \Omega$ tel que $X(\omega_1) = 1$ et un élément $\omega_2 \in \Omega$ tel que $Y(\omega_2) = 10$.

3) Espérance d'une somme de variables aléatoires

PROPRIÉTÉ — admise

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

EXEMPLE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,2$.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $m = 100$ et $q = 0,5$.
On a donc $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = np + mq = 200 \times 0,2 + 100 \times 0,5 = 90$.

REMARQUES

- X et Y suivent une loi binomiale mais pas $X+Y$.
- Les valeurs prises par X sont tous les entiers entre 0 et 200, les valeurs prises par Y sont tous les entiers entre 0 et 100. En revanche, les valeurs prises par Z ne sont pas nécessairement **tous** les entiers entre 0 et 300 (sauf si X et Y sont indépendantes).

4) Variance d'une somme de variables aléatoires

PROPRIÉTÉ — admise

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, en supposant que les variables X et Y sont indépendantes, on a :
$V(X+Y) = V(X)+V(Y) = np(1-p)+mq(1-q) = 200\times 0,20\times 0,8+1000\times 0,50\times 0,5 = 57$.
On a alors $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{57}$ (écart-type de $X+Y$)

5) Échantillons de n variables aléatoires identiques et indépendantes

DÉFINITIONS

Soient n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.

- Un **échantillon de taille n de la loi de probabilité de** X est une liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques et suivant toutes la loi de probabilité de X.

- La **variable aléatoire somme** S_n d'un échantillon de taille n de la loi de X est définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

- La **variable aléatoire moyenne** M_n d'un échantillon de taille n de la loi de X est définie par

$$M_n = \frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

EXEMPLE

A chaque jour d'une semaine donnée, on associe le chiffre d'affaires X_i (avec i un entier compris entre 1 et 7) d'un supermarché, en milliers d'euros.
On suppose que les variables aléatoires X_i sont identiques et indépendantes et suivent toutes la même loi d'espérance 120 (en milliers d'euros) d'une variable aléatoire X.

Ces variables X_i sont définies sur l'univers $\Omega = \{(x_1\,;x_2\,;...\,;x_7)$ avec $x_i \in \mathbb{R}^+$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 7\}$:

Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 7$, on a : $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad w \longmapsto X_i(w)$

Par exemple, $X_3((12\,;24\,;47\,;32\,;270\,;340\,;320)) = 47$.

Ainsi, on peut définir **la variable aléatoire somme S_7** d'un échantillon de taille 7 de la loi de X comme la variable aléatoire qui, à une semaine donnée, associe le chiffre d'affaires de la semaine.
Et on a $S_7 = \sum_{i=1}^{7} X_i$.

Ainsi, $S_7((12\,;24\,;47\,;32\,;270\,;340\,;320)) = \sum_{i=1}^{7} X_i((12\,;24\,;47\,;32\,;270\,;340\,;320)) = 12+...+320 = 1165$

De même, on peut définir **la variable aléatoire Moyenne M_7** de cet échantillon comme la variable aléatoire qui, à une semaine donnée, associe le chiffre d'affaire moyen quotidien.
Et on a $M_7 = \frac{1}{7}S_7 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i$.

Ainsi, $M_7((12\,;24\,;47\,;32\,;270\,;340\,;320)) = \frac{1}{7}S_7((12\,;24\,;47\,;32\,;270\,;340\,;320)) = \frac{1}{7}\times 1165 \approx 166,4$

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul.
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.
Soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de X.
On a alors :

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$$

DÉMONSTRATION

• D'après la linéarité de l'espérance vu précédemment, on a :
$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$.
Or toutes les variables X_i suivent la même loi que X et ont donc la même espérance que X.
Donc $E(S_n) = E(X) + E(X) + ... + E(X) = nE(X)$.

• De la même manière, les variables X_i étaient indépendantes, on a :
$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$.
Or toutes les variables X_i suivent la même loi que X et ont dont la même variance que X.
Donc $V(S_n) = V(X) + V(X) + ... + V(X) = nV(X)$.

• $V(S_n) = nV(X)$, et $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)}$.
Donc $\sigma(S_n) = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n} \times \sqrt{V(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_7 suivent la même loi que la variable aléatoire X d'espérance 120, on a alors :
$E(S_7) = 7E(X) = 7 \times 120 = 840$

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul.
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X.
On a alors :

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \qquad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

DÉMONSTRATION

• $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$.

• On rappelle un résultat sur la variance : pour tout réel a, $V(aX) = a^2V(X)$. Ainsi :
$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$.

• Enfin, $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, on a donc $E(M_7) = E(X) = 120$.

II L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1) L'inégalité de Markov

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un réel strictement positif. Alors :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

REMARQUES

- **Interprétation de cette propriété :** ce résultat signifie que la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

- Si $a \leqslant E(X)$, l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt, car alors $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant 1$, et donc on obtient $P(X \geqslant a) \leqslant 1$, ce qui est évident.

EXEMPLE

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 1.

D'après l'inégalité de Markov, on a alors $P(X \geqslant 100) \leqslant \dfrac{1}{100}$, soit $P(X \geqslant 100) \leqslant 0,01$.

Autrement dit, une variable aléatoire positive dont l'espérance vaut 1 a au plus une chance sur 100 de dépasser 100.

DÉMONSTRATION

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives (ou nulles) dont on note x_i les n valeurs pour l'entier i entre 1 et n.
Par définition de l'espérance, on a $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.

Séparons cette somme en deux sommes en considérant les valeurs x_i supérieures ou égales à a, et celles strictement inférieures à a.
On a donc $E(X) = \sum_{x_i \geqslant a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i)$.

Pour tout entier i compris entre 1 et n, on sait que $x_i \geqslant 0$ (puisque X est positive ou nulle), et $P(X = x_i) \geqslant 0$ (par définition d'une probabilité), donc $\sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) \geqslant 0$.

On en déduit que $E(X) \geqslant \sum_{x_i \geqslant a} x_i P(X = x_i)$. (*)

De plus, dans cette partie de la somme, pour tout entier i compris entre 1 et n, $x_i \geqslant a$.
Donc en multipliant chaque membre de cette inégalité par $P(X = x_i)$ (positif ou nul), on a : $x_i P(X = x_i) \geqslant aP(X = x_i)$.

Donc par somme, $\sum_{x_i \geqslant a} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{x_i \geqslant a} aP(X = x_i)$, d'où $E(X) \geqslant \sum_{x_i \geqslant a} aP(X = x_i)$ d'après (*).

Or $\sum_{x_i \geqslant a} aP(X = x_i) = a \sum_{x_i \geqslant a} P(X = x_i) = aP(X \geqslant a)$.

Par conséquent, $E(X) \geqslant aP(X \geqslant a)$.

Puisque $a > 0$, on obtient finalement $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

2) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire et soit a un réel strictement positif. Alors :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

REMARQUES

- **Interprétation de cette propriété :** ce résultat signifie que la probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins a de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que a est grand.

- On dit que l'intervalle $[E(X) - a\,; E(X) + a]$ est un **intervalle de fluctuation** de X.

DÉMONSTRATION

Comme $a > 0$, on a $|X - E(X)| \geqslant a \iff (X - E(X))^2 \geqslant a^2$.
De plus, la variable $(X - E(X))^2$ est positive ou nulle.
On peut donc appliquer l'inégalité de Markov à la variable $(X - E(X))^2$ et au réel a^2.
Ainsi, $P((X - E(X))^2 \geqslant a^2) \leqslant \dfrac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$.
Or par définition, $E((X - E(X))^2) = V(X)$, donc $P((X - E(X))^2 \geqslant a^2) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$,
et on a bien $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.

EXEMPLE

Soit X une variable aléatoire et σ l'écart-type de X.
Alors $P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma) \leqslant \dfrac{V(X)}{(2\sigma)^2}$, soit $P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le double de son écart-type est inférieure à $0,25$.

REMARQUE

Il est courant d'exprimer le réel a dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev comme un multiple de l'écart-type de X, puisque l'écart-type représente justement la dispersion moyenne de X autour de son espérance.
En posant $a = k\sigma$, où k est un entier naturel (généralement 1, 2 ou 3), et σ l'écart-type de X, on a alors :

$$\begin{aligned}
P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} &\iff P(|X - E(X)| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{V(X)}{(k\sigma)^2} \\
&\iff P(|X - E(X)| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{V(X)}{k^2\sigma^2} \\
&\iff P(|X - E(X)| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2} \text{ (car } \sigma^2 = V(X))
\end{aligned}$$

On peut donc réécrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ainsi :

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire et σ l'écart-type de X. Alors pour tout entier naturel k, on a :

$$P(|X - E(X)| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

III Loi des grands nombres

1) L'inégalité de concentration

THÉORÈME

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.
Autrement dit, $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi de probabilité (celle de X). Alors pour tout réel a strictement positif,

$$P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$$

Cette inégalité est appelée **l'inégalité de concentration**.

DÉMONSTRATION

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n :
Pour tout réel a strictement positif, on a donc

$$P(|M_n - E(M_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(M_n)}{a^2}$$

Or on a vu que $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$. Ainsi, on a bien $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$.

EXEMPLE

On effectue n lancers successifs supposés indépendants d'une pièce équilibrée.
On associe à chaque tirage i la variable aléatoire X_i, prenant comme valeur 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On a, pour tout entier i compris entre 1 et n : $E(X_i) = \frac{1}{2}$ et $V(X_i) = \frac{1}{4}$.
Pour $n = 10\,000$ et $a = 0,01$, l'inégalité de concentration donne :
$P\left(\left|M_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{\frac{1}{4}}{10\,000 \times 0,01^2}$, donc $P\left(\left|M_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{1}{4}$.

Ainsi, pour 10 000 lancers, la probabilité que la proportion de pile obtenue s'écarte de plus d'un centième de $\frac{1}{2}$ est inférieure à $\frac{1}{4}$.

2) Loi faible des grands nombres

PROPRIÉTÉ

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors pour tout réel a strictement positif :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant a) = 0$$

DÉMONSTRATION

On applique l'inégalité de concentration à la variable M_n. Ainsi, $0 \leqslant P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{na^2}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{V(X)}{na^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant a) = 0$.

EXEMPLE

On considère une urne contenant 5 boules noires et 3 boules blanches. On souhaite estimer la probabilité d'obtenir au moins six boules noires sur un ensemble de dix tirages avec remise.
Pour simuler cette expérience plusieurs, on a écrit un programme en Python.
En effectuant 100 000 épreuves de dix tirages, on obtient une proportion $p \approx 0,6943$.
Sachant que la variance est $2,344$, déterminer la probabilité de se tromper de plus d'un centième.

Correction :
D'après la loi des grands nombres, la probabilité cherchée est proche de $0,6943$.
La probabilité de s'écarter de plus de $a = 0,01$ est donc inférieure à $\dfrac{V(X)}{n \times a^2}$, soit $0,2344$.