CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ : exercices

Exercice 1 – Fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 25$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
3. Déterminer à la calculatrice une valeur arrondie au centième près de α.

Exercice 2 – Étude d'une fonction à partir d'un tableau de variation

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$ dont voici le tableau de variations :

x	-3		2		5
f	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[2\,;5]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-3\,;2]$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

Exercice 3 – Continuité et TVI

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau de variations de f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-1

1. (a) La fonction f est-elle continue sur $]-3\,;+\infty[$?
   (b) Donner deux intervalles où f est continue mais non monotone.
   (c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. (a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une unique solution ?
3. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas le savoir :
   (a) $f'(-2) \times f'(0) < 0$.
   (b) $f'(-2) \times f'(3) > 0$.
   (c) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-3\,;5[$.
   (d) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5\,;+\infty[$.

Exercice 4 –

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation

$$(E)\ :\ x\,\mathrm{e}^{2x} + 3x - 1 = 0$$

PARTIE A :
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 3 + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x} + 3x - 1$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.
3. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
4. Justifier que l'équation (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 5 – fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer f' la dérivée de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. Déterminer les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Calculer f" la dérivée de f', déterminer les variations de f' puis tracer son tableau de variations.
6. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
7. En déduire le signe de f' et les variations de f.
8. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha} - \alpha$.

Exercice 6 – Une fonction polynôme de degré 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et C sa courbe représentative.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout réel x, $f''(x) = 20x^2(x-3)$.
2. Dresser en justifiant le tableau de signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'existence d'un unique point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
4. Étudier enfin la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

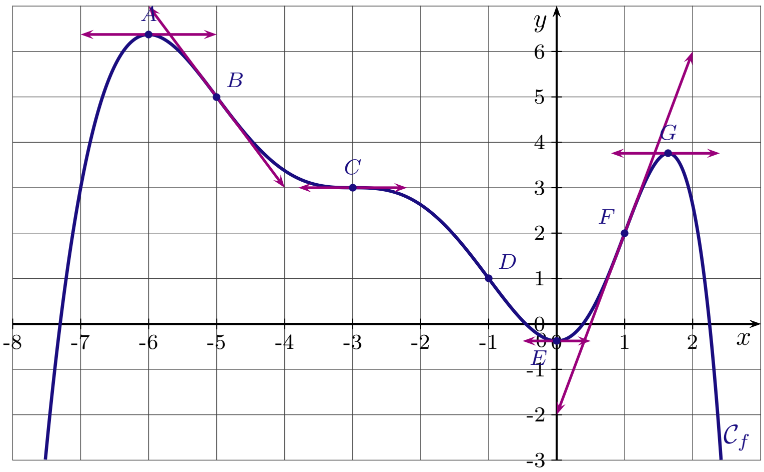
Exercice 7 – Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;10]$ par $f(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^{2x} - 1$.

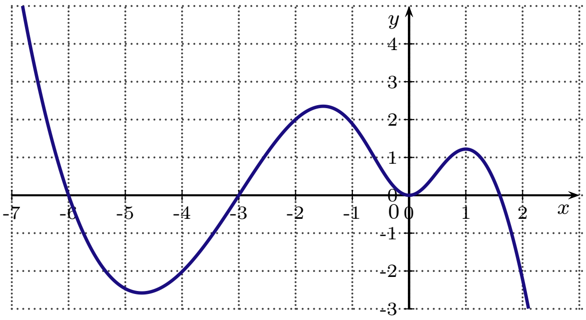
1. Déterminer les variations de f sur $[0\,;10]$ puis dresser son tableau de variations.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;10]$, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
3. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0\,;10]$.
4. Étudier la convexité de f sur $[0\,;10]$.
5. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe de f.

Exercice 8 – Avec des graphiques

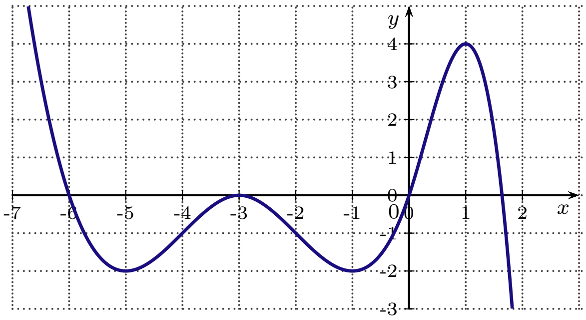
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



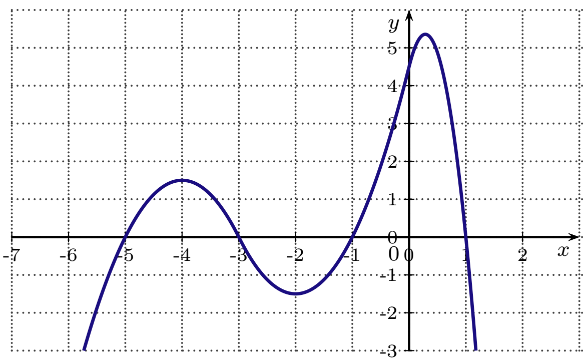
1. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $F(1;2)$ passe par le point de coordonnées $(0;-2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y=-2x-1$.
   (a) Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D. Le point D est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?
   (b) Déterminer $f'(-1)$.
3. Déterminer $f'(-5)$ et $f''(-5)$.
4. Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :
   (a) $f'(-6)\dots 0$ (b) $f'(-7)\dots f'(-2)$ (c) $f''(-7)\dots f''(0)$ (d) $f''(1)\dots 0$
5. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.
   Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.



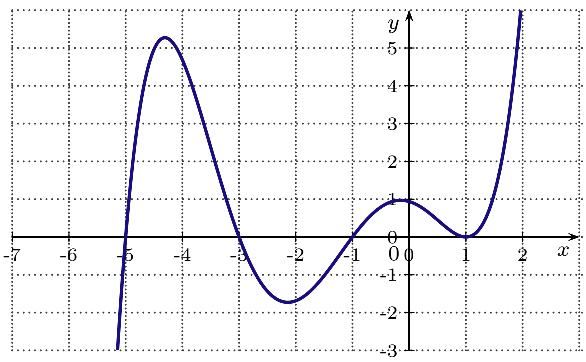
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

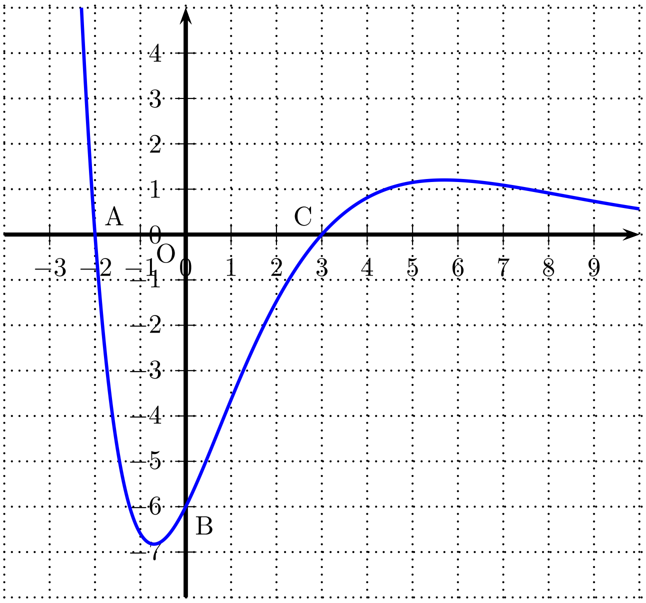
Exercice 9 – Une autre étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+1)\,\mathrm{e}^{2x+1} - 1$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{5}{6}\,;1\right]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, puis donner une valeur approchée de α à $0,01$ près.
4. En déduire le signe de f sur $\left[-\dfrac{5}{6}\,;+\infty\right[$.
5. Déterminer la dérivée seconde f'' de f sur $\mathbb{R}$, et en déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
6. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet-elle des points d'inflexion ?
   Si oui, donner les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 10 – Bac Métropole 2014

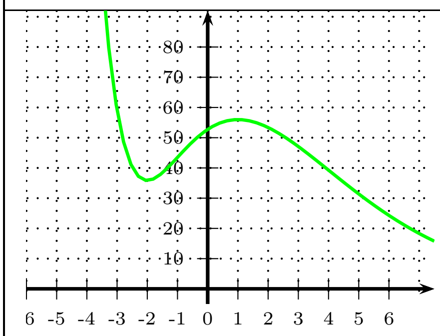
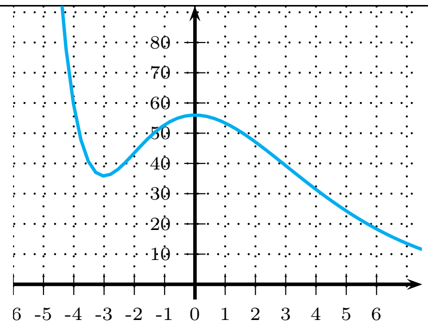
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : A$(-2\ ;\ 0)$; B$(0\ ;\ -6)$ et C$(3\ ;\ 0)$.



Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

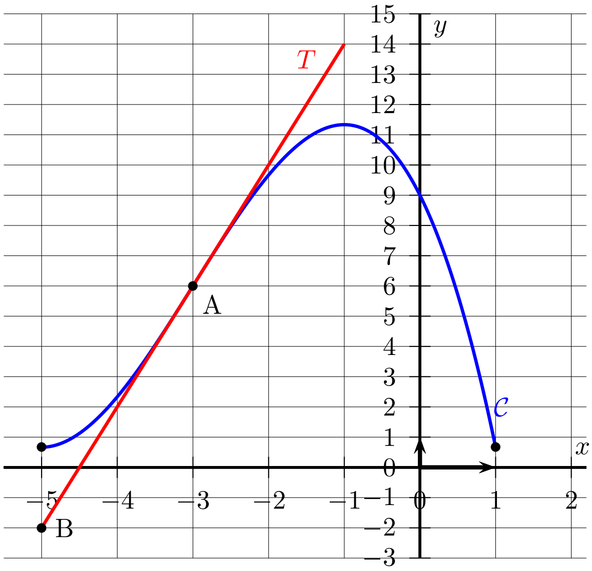
1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2\ ;\ 3]$, la fonction f est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1	Courbe 2
	

Exercice 11 – Bac 2016

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question posée, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte $0,5$ point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $\mathrm{A}(-3\ ;\ 6)$ et passe par le point de coordonnées $(-5\ ;\ -2)$.
Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-5\ ;\ 1]$.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Alors :

   A. $f'(-3) = 6$ **B.** $f'(-3) = 4$ **C.** $f'(-3) = \dfrac{1}{4}$ **D.** $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. Alors :

   A. $f''(-3) = 6$ **B.** $f''(-3) = 4$ **C.** $f''(-3) = 0$ **D.** $f''(-3) = \dfrac{1}{4}$

3. La fonction f est :

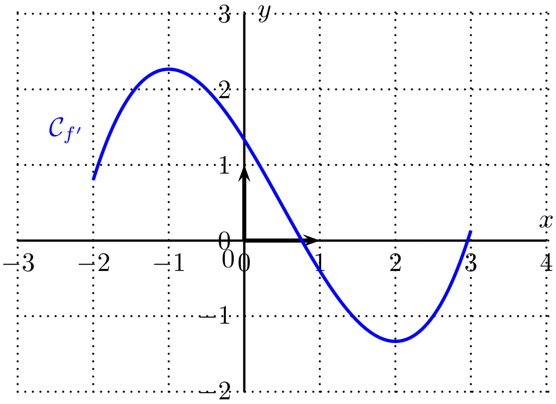
   A. convexe sur $[-5\ ;\ -3]$ **B.** convexe sur $[-5\ ;\ -1]$
   C. convexe sur $[-3\ ;\ 1]$ **D.** concave sur $[-5\ ;\ 1]$

4. La fonction dérivée de f est :

   A. décroissante sur $[-3\ ;\ -1]$ **B.** croissante sur $[-3\ ;\ -1]$
   C. croissante sur $[-1\ ;\ 1]$ **D.** croissante sur $[-5\ ;\ -1]$

Exercice 12 – A partir de la dérivée

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $[-2\,;3]$ et dont la dérivée f' est représentée ci-dessous :



Déterminer la convexité de f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion de sa courbe.