Terminale Maths Expertes – Chapitre 07

GRAPHES

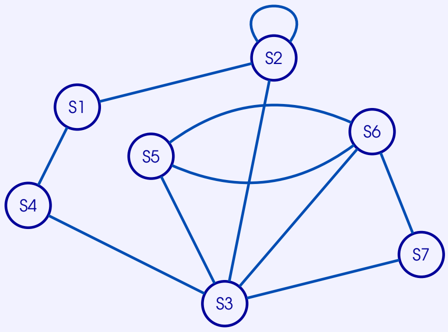


Table des matières

I Généralités sur les graphes

1) Premières définitions

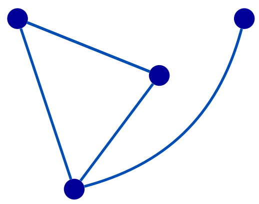
DÉFINITIONS

- Un graphe est un ensemble constitué de **sommets** pouvant être reliés par des **arêtes**.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Un sommet est dit **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet du graphe.
- Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.
- L'**ordre d'un graphe** est son nombre total de sommets.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- Un graphe **simple** est un graphe ne comportant pas de boucle.
- Un graphe **complet** est un graphe **simple** et dont **tous** les sommets sont **adjacents** deux à deux.

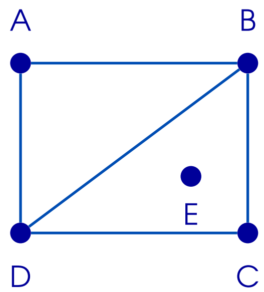
REMARQUE

Lorsqu'on détermine le degré d'un sommet comportant une boucle, il faut compter cette boucle **deux fois** : en effet, la boucle représente **deux** « chemins » partant de ce sommet. Elle compte double.

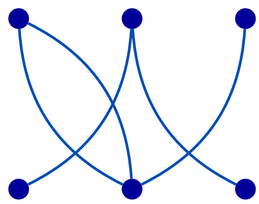
EXEMPLES



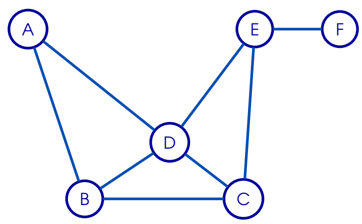
Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3

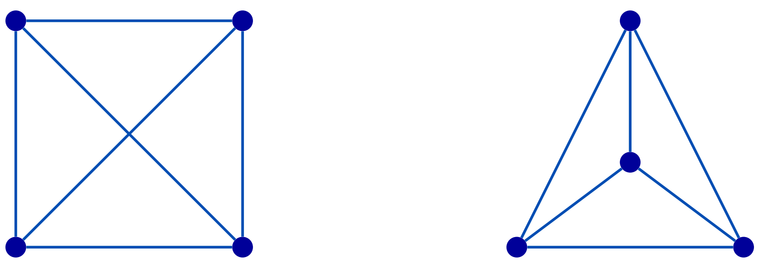


Graphe G_4

Par exemple, le graphe G_1 a un ordre égal à 4, il possède un sommet de degré 1, deux sommets de degré 2 et un sommet de degré 3, et il n'a pas de sommet isolé. Aucun des graphes présentés n'est complet.

REMARQUE

Plusieurs représentations d'un même graphe sont possibles. Par exemple, un graphe composé de 4 sommets tous adjacents deux à deux peut avoir deux représentations :



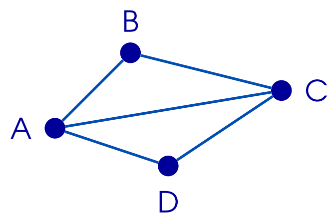
Deux représentations d'un même graphe G_5
(Remarque : ce graphe est complet)

2) Lemme des poignées de mains

PROPRIÉTÉ

La **somme des degrés des sommets** d'un graphe non orienté est égale au **double** du **nombre total d'arêtes** de ce graphe (c'est donc nécessairement un nombre pair !)

EXEMPLE



Le sommet A est de degré 3, le sommet B de degré 2, le sommet C de degré 3 et le sommet D de degré 2.

La **somme des degrés** est donc $3+2+3+2=10$.

Le graphe possède **un total de 5 arêtes**.

Idée de démonstration

Lorsque l'on fait la somme de tous les degrés d'un graphe, on effectue la somme des extrémités de chaque arête de ce graphe. Or chaque arête a deux extrémités, elle sera donc comptée au total deux fois.

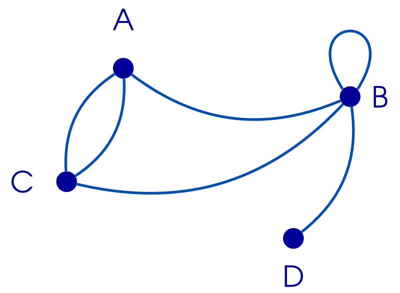
II Chaînes et cycles d'un graphe

1) Chaîne, longueur, cycle

DÉFINITIONS

• Une **chaîne** d'un graphe G est une liste **ordonnée** de sommets de G telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
• Une chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont confondus.
• La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
• Un **cycle** est une **chaîne fermée** composée d'arêtes toutes **distinctes**.

EXEMPLE



• A-B-C est une **chaîne de longueur 2**. (*car il y a 2 arêtes*)
• A-B-C-D **n'existe pas** car il n'existe pas de chaîne reliant C à D.
• D-B-A-C-B-D est une **chaîne fermée de longueur 5**. Ce n'est pas un cycle car on parcourt deux fois l'arête entre B et D.
• B-A-C-B est un **cycle de longueur 3**.

2) Graphe connexe

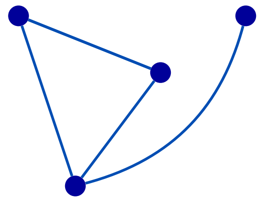
DÉFINITION

Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de ses sommets par une chaîne.

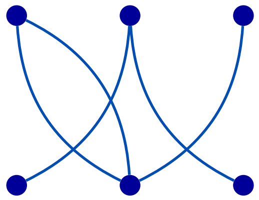
REMARQUE

Un graphe **complet** est nécessairement **connexe**. (Bien entendu, la réciproque est fausse)

EXEMPLES



graphe **connexe**.



graphe **non connexe**.

3) Graphe orienté

DÉFINITION

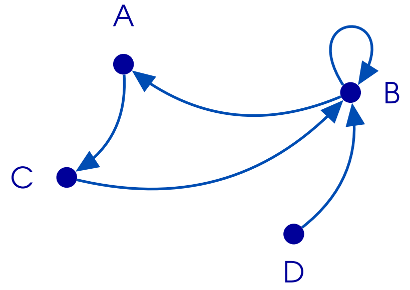
Un graphe est dit **orienté** lorsque ses arêtes ont un **sens de parcours**. Chaque arête a alors une **origine** et une **extrémité** et est représentée par une **flèche**.

REMARQUE

Les définitions données précédemment pour un graphe non orienté (ordre, degré, ...) s'étendent aux graphes orientés avec toutefois des équivalences de mots de vocabulaire :

Graphe non orienté	Graphe orienté
arête	arc
chaîne	chemin
cycle	circuit

EXEMPLE



- A-C-B est un **chemin** de longueur 2.
- Le chemin D-B-C n'existe pas.
- D-B-A-C-B-A est un **chemin** de longueur 5.
- B-A-C-B-B est un **circuit** de longueur 4.

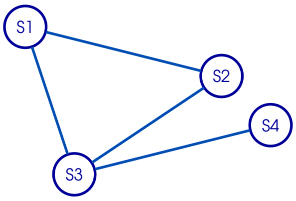
III Matrice d'adjacence d'un graphe

1) Représentation matricielle d'un graphe

DÉFINITION

Pour un graphe *non orienté* :
Soit n un entier naturel non nul et soit G un graphe **non orienté** d'ordre n.
On appelle **matrice associée à G**, ou **matrice d'adjacence de G**, la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n telle que a_{ij} soit égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

EXEMPLE

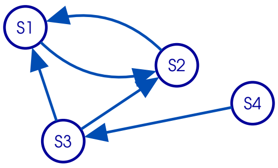


La matrice d'adjacence de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

DÉFINITION

Pour un graphe *orienté* :
Soit n un entier naturel non nul et soit G un graphe **orienté** d'ordre n.
On appelle **matrice associée à G**, ou **matrice d'adjacence de G**, la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n telle que a_{ij} soit égal au nombre d'arc d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j.

EXEMPLE



La matrice d'adjacence de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Propriétés

PROPRIÉTÉ

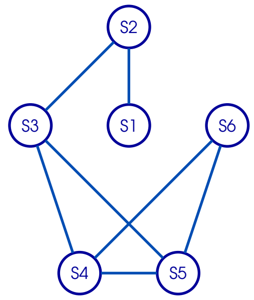
- La matrice d'adjacence d'un graphe **simple** ne présente **que des 0 et des 1** et sa diagonale ne comporte que des 0.
- La somme des coefficients de la i-ème ligne est égale au degré du i-ème sommet.
- Dans le cas d'un **graphe non orienté**, la matrice d'adjacence est **symétrique**.
- **Graphe non orienté :** la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au double du nombre d'arêtes du graphe.
- **Graphe orienté :** la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arcs du graphe.

3) Nombre de chaînes de longueur n d'un graphe

PROPRIÉTÉ

Soit G un graphe, M sa matrice d'adjacence et n un entier naturel non nul.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice ij de la matrice M^n.

EXEMPLE



Soit G le graphe ci-contre. La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors déterminer, par un calcul ou à l'aide de la calculatrice, les matrices M^2, M^3 et M^4 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Ces matrices donnent respectivement le nombre de chaînes de longueurs 2, 3 et 4, joignant chaque somme du graphe à un autre sommet du graphe.

Démonstration

On fait une démonstration par récurrence.

La propriété est vraie au rang 1 puisque c'est la définition de la matrice d'adjacence vue au-dessus.
Supposons la propriété vraie à un rang n (avec $n \geqslant 1$) et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$:
Soient m_{ij} le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^n, m'_{ij} celui de la matrice M^{n+1} et a_{ij} celui de M.

Pour aller du sommet i au sommet j en $n+1$ arêtes, on va de i à un sommet quelconque h en n arêtes, puis de h à j en une arête, puis on fait la somme de tous ces chemins pour h allant de 1 à n.

On obtient alors comme nombre de chemins de longueur $n+1$ allant de i à j $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} m_{ih}a_{hj}$, c'est-à-dire m'_{ij}.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, donc par récurrence elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

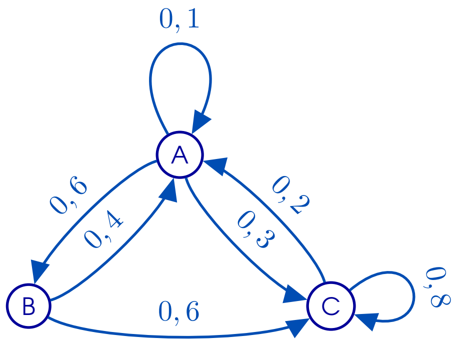
IV Chaînes de Markov

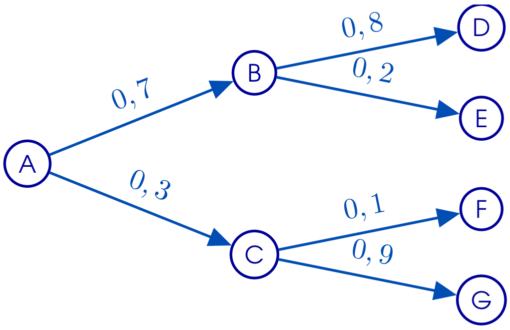
1) Graphe pondéré et graphe probabiliste

DÉFINITIONS

• Un **graphe pondéré** est un graphe dans lequel chaque arête est affectée d'un nombre réel positif appelé poids de l'arête.
• Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1, et où pour chaque sommet, la somme des poids des flèches partant du sommet vaut 1.

EXEMPLES





Un arbre de probabilité est donc un graphe probabiliste !

2) Chaînes de Markov

DÉFINITIONS

Soit une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E.
• Les éléments de E sont appelés les **états** et E est appelé **l'espace des états**.
• On dit que (X_n) est une **chaîne de Markov** si :
1) pour tout i de E et tout entier naturel n, l'événement $X_{n+1} = i$ ne dépend que de l'état dans lequel est X_n et pas des précédents. (*le futur ne dépend que du présent et non du passé*)
2) Pour tous i et j de E et tout entier naturel n, la **probabilité de transition** de l'état i vers l'état j est indépendante de n.

EXEMPLE

Pierre va à l'école en bus ou en vélo. On sait que le premier jour, il y va en bus avec une probabilité de $0,2$. On sait de plus qu'il y va en bus avec une probabilité de $0,3$ s'il y est allé en bus la veille, et avec une probabilité de $0,8$ s'il y est allé en vélo la veille.
Ceci est bien une chaîne de Markov car ce qui se passe un jour ne dépend que du jour précédent, et parce que les probabilités de transition sont constantes. On a par exemple $P(X_0 = B) = 0,2$.

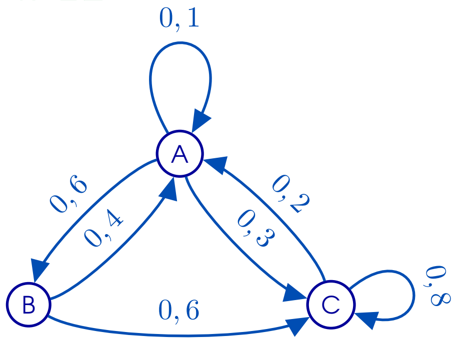
Dessiner le graphe probabiliste correspondant.

3) Matrice de transition

DÉFINITION

On considère une chaîne de Markov à k états numérotés de 1 à k et on note $E = \{1\,;2\,;\ldots\,;k\}$ l'espace des états.
La **matrice de transition** P associée à cette chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre k telle que, pour tout couple $(i\,;j) \in E^2$, le coefficient p_{ij} est la probabilité de transition de l'état i vers l'état j.

EXEMPLE



Graphe G

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Matrice P de transition associée à G

REMARQUES

- Tous les coefficients sont des réels compris entre 0 et 1 ;
- La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 ;
- Le coefficient $t_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état S_j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état S_i à l'instant n.

4) Évolution d'une chaîne de Markov

DÉFINITIONS

Soit (X_n) une chaîne de Markov. Pour tout entier naturel n, on note π_n la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

Alors π_0 est la **distribution initiale**, et π_n est la **distribution** après n transitions (ou à l'étape n).

Pour tout entier n, π_n est une matrice ligne et ayant autant de colonnes qu'il y a d'états possibles pour la variable aléatoire X_n. Les états sont toujours rangés dans un ordre prédéfinis.

EXEMPLE

Dans l'exemple de Pierre, on a $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ

Soit (X_n) une chaîne de Markov et P sa matrice de transition associée.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.

Idée de démonstration

On peut démontrer la formule avec deux états à l'aide de la formule des probabilités totales, puis par récurrence pour n état.

EXERCICE

On reprend l'exemple de Pierre.

1) Déterminer la matrice de transition de la chaine de Markov, en rangeant les états dans l'ordre alphabétique.

2) Préciser π_0 et calculer la probabilité que Pierre prenne le bus le 7e jour.

3) Calculer π_{20} puis $\pi 100$. Que remarque-t-on ? Comment l'interpréter ?

5) Distribution invariante

DÉFINITION

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov.
On appelle **distribution invariante** de la chaîne de Markov une distribution π vérifiant $\pi P = \pi$

REMARQUES

- On peut parler parfois d' **état stable**.
- Il existe toujours au moins une distribution invariante (admis).

PROPRIÉTÉ

Soient (X_n) une chaîne de Markov et P sa matrice de transition.
Pour tout entier naturel n, on note π_n la loi de probabilité de X_n.

S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que P^k ne contienne aucun 0, alors la suite de matrices (π_n) converge vers l'unique distribution invariante de cette chaîne de Markov.

Ce résultat est indépendant de la distribution initiale π_0.