Terminale Maths Expertes – Chapitre 03

MATRICES

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Table des matières

I Notion de matrices et vocabulaire

1) Définition

DÉFINITION

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.
Une matrice est un tableau rectangulaire formé de m lignes et n colonnes de nombres.
Sa taille (ou sa dimension, ou encore son format) est notée $m \times n$ ou $(m\,;n)$.

EXEMPLE

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1,8 \end{pmatrix}$ est une matrice de 2 lignes et de 3 colonnes, et donc de taille 2×3.

2) Écriture générale d'une matrice

DÉFINITION

Une matrice A de taille $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ s'appellent les **coefficients** de la matrice.
On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n}$
Le coefficient a_{ij} est le nombre placé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

REMARQUES

- les coefficients a_{ij} peuvent parfois être notés $a_{i,j}$, notamment pour éviter les confusions dans le cas de grandes matrices (plus de 9 lignes ou de 9 colonnes).
- une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée une matrice nulle (il y a une infinité de matrices nulles distinctes, car de taille différentes).

3) Égalité de deux matrices

PROPRIÉTÉ

On dit que deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.
Autrement dit, deux matrices A et B sont égales si et seulement elles sont de même taille $n \times m$ (n et m des entiers naturels non nuls) et si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a : $a_{ij} = b_{ij}$.

4) Quelques matrices particulières

a Matrice ligne, matrice colonne

DÉFINITIONS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une **matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne. Elle est de taille $1 \times n$.
Une **matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne. Elle est de taille $n \times 1$.

EXEMPLES

$\begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

REMARQUE

Les coordonnées des vecteurs sont souvent représentées sous forme de matrice colonne à deux lignes pour les vecteurs du plan, et à trois lignes pour les vecteurs de l'espace.

b Les matrices carrées

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice formée de n lignes et n colonnes.

EXEMPLE

$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & 2,7 \\ \frac{3}{4} & -2 & 1,4 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 3.

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une matrice carrée d'ordre n, les coefficients a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn} forment la diagonale de la matrice.

DÉFINITION

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients qui ne sont pas situés sur sa diagonale sont nuls.

EXEMPLE

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice identité (ou unité) d'ordre n, notée I_n, est la matrice carrée (et diagonale) d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.

EXEMPLE

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice nulle d'ordre n, notée O_n, est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

II Somme de deux matrices

PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux matrices **de même taille**. La somme de A et B est la matrice notée $A+B$ dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux les coefficients qui ont la même position dans A et B.

EXEMPLE

Soient $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $A+B = \begin{pmatrix} 0,2+5 & 3+1 & 0+4 \\ 1+2 & -2+4 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

III Produit d'une matrice par un réel

1) Matrice kA

PROPRIÉTÉ

Soit A une matrice et k un nombre réel. Le produit de la matrice A par le nombre réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de la matrice A par le nombre k.

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0,3 & 4 \end{pmatrix}$ et $k = 3$. Alors $3A = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) & 3 \times 2 \\ 3 \times 0,3 & 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0,9 & 12 \end{pmatrix}$

REMARQUE

Les deux propriétés précédentes permettent de définir la différence de deux matrices :

$$A - B = A + (-1)B$$

2) Propriétés de distributivité

PROPRIÉTÉS

Soient A, B et C trois matrices de même taille et soient k et k' deux réels. Alors on a :
(1) : $A + B = B + A$ (Commutativité de l'addition)
(2) : $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (Associativité de l'addition)
(3) : $k(A + B) = kA + kB$
(4) : $(k + k')A = kA + k'A$
(5) : $k(k'A) = (kk')A = kk'A$

EXEMPLE

Soit A et B deux matrices de même taille. Posons M la matrice définie par : $M = 2(A+3B) - (A+5B)$.
Alors $M = 2A + 6B - A - 5B = A + B$.

IV Produit de deux matrices

1) Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice colonne de taille $n \times 1$.

Alors $A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \dots + a_{1n} \times b_{n1}$

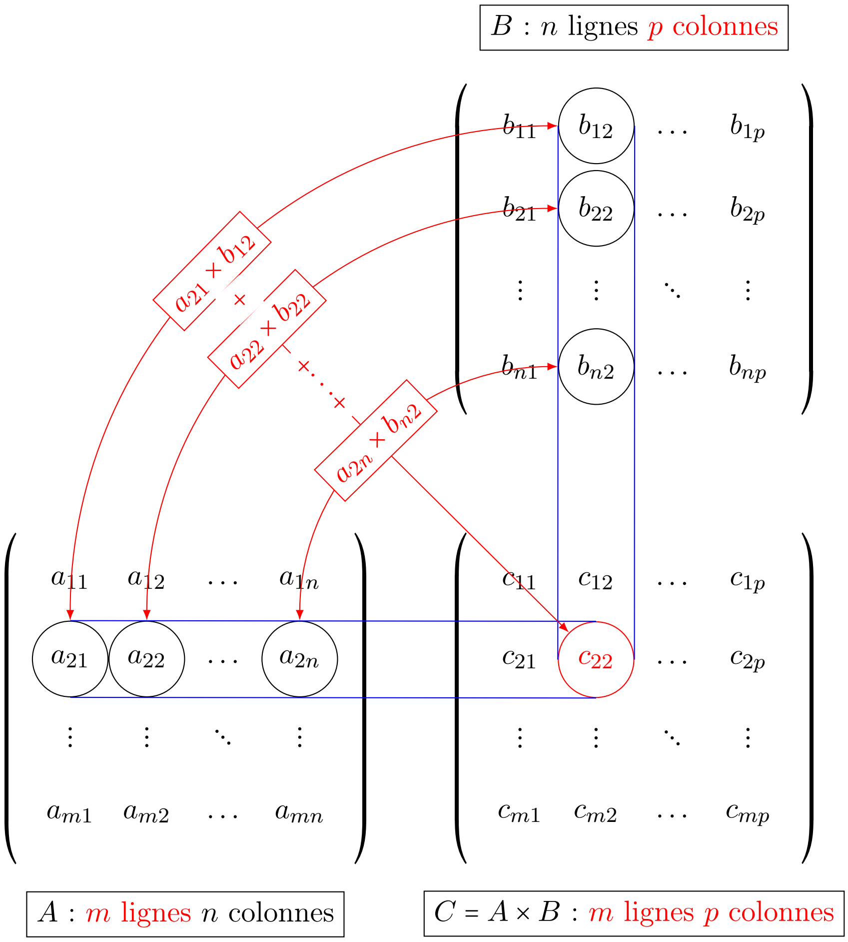
EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times (-5) + 4 \times 3 = 7$$

2) Produit A×B

PROPRIÉTÉ

Soient m, n et p trois entiers naturels non nuls.
Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.
Le produit $A \times B$ ou AB est la matrice de taille $m \times p$ dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.



EXEMPLE

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ & \times & \\ \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

REMARQUES

- Le produit $A \times B$ n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
- En général, le produit de deux matrices n'est pas commutatif : $A \times B \neq B \times A$.
- Si $AB = AC$, alors on ne peut PAS "simplifier" et en déduire que $B = C$.
- $A \times B = O$ ne signifie pas que $A = O$ ou $B = O$ (avec O matrice nulle). Ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Propriétés

PROPRIÉTÉS

Soient A, B et C des matrices telles que les opérations suivantes existent.
- Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. On note ce produit $A \times B \times C$ ou ABC.
- Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- Soit A une matrice carrée d'ordre n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et I_n la matrice unité d'ordre n.
Alors $I_n \times A = A \times I_n = A$.

4) Puissance entière d'une matrice carrée

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul, soit A une matrice carrée d'ordre n et soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La matrice A^k est la matrice carrée d'ordre n définie par $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$

REMARQUE

Si A est une matrice carrée d'ordre n et non nulle, alors $A^0 = I_n$.

EXEMPLES

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. Que remarque-t-on ?

REMARQUE

On peut généraliser le résultat à toute matrice diagonale :

si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel p, $A^p = \begin{pmatrix} {a_{11}}^p & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & {a_{22}}^p & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & {a_{nn}}^p \end{pmatrix}$

V Matrice inverse

1) Définition de A^{-1}

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul, et soit alors A une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n, notée A^{-1} telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
La matrice A^{-1} est alors unique et appelée **la matrice inverse** de A.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$.

REMARQUES

- En pratique, il suffit de montrer que $AB = I_n$ (ou bien que $BA = I_n$) pour montrer que B est la matrice inverse de A.
- La matrice nulle O_n d'ordre n n'est pas inversible, car pour toute matrice carrée A d'ordre n, $O_n \times A = O_n \neq I_n$.

EXERCICE

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis exprimer A^2 en fonction de I_2.

2) En déduire que A est inversible et donner alors sa matrice inverse A^{-1}.

2) Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2

DÉFINITION

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d quatre réels.

Le réel $ad - bc$ est appelé le **déterminant** de la matrice A et est noté $\det(A)$.

PROPRIÉTÉ

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. La matrice A est **inversible** $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Dans ce cas, on a alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

EXEMPLE

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = 3 \times 9 - 7 \times 5 = 27 - 35 = -8$. $\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

Sa matrice inverse est alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-8} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

REMARQUES

- Cette propriété peut être démontrée en vérifiant que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Le fait que A inversible $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ peut être mis en parallèle avec le critère de colinéarité de vecteurs.

VI Des exemples de représentations matricielles

1) Résolution de systèmes linéaires

Le système $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ peut s'écrire $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Ainsi, résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues revient à résoudre une **équation matricielle** de la forme $A \times X = B$. Supposons que A soit inversible. Alors :
$A \times X = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow I \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$.
D'où la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

Soit A une matrice carrée inversible. Alors l'équation matricielle $AX = B$ a pour solution $X = A^{-1}B$.

REMARQUE

Lorsque la matrice A n'est pas inversible, le système d'équations peut avoir une infinité de solutions, ou aucune solution.

EXEMPLE

On considère le système $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

1) Écrire le système ci-dessus sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$, en précisant les matrices A, B et X.
2) On admet que la matrice A est inversible.

   Démontrer que sa matrice inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.
3) En déduire la valeur de la matrice X puis les solutions du système d'équations.

2) Transformations du plan

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

PROPRIÉTÉ

Soient un point $M(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$ son image par la transformation du plan associée.

- Pour une translation de vecteur $\vec{t}(a\,;b)$, on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées, on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pour une rotation de centre 0 et d'angle α, on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pour une homothétie de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}$), on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

REMARQUE

La matrice T tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelée la **matrice de transformation** (pas pour une translation donc).

DÉMONSTRATION

A démontrer à l'aide de figures.

EXEMPLES

1) Soient $A(2\,;-3)$ et $B(-5\,;3)$. Déterminer l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, et l'image B' de B par la translation de vecteur $\vec{t}(2\,;4)$.

2) Déterminer l'image A'' de A par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $y = x$.

3) Déterminer l'image B'' de B par la symétrie centrale de centre O. (Faire le lien avec une rotation)

VII Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$

1) Propriété

PROPRIÉTÉ

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient (U_n) une suite de matrices colonnes de format $k \times 1$ définie par la donnée de U_0 et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$, avec A une matrice carrée d'ordre k.
Alors pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

DÉMONSTRATION

Par récurrence (facile).

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

1) Calculer U_1.
2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n en fonction de A et de n.
3) A l'aide de la calculatrice, calculer U_{10}.

2) Étude des suites de matrices de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$

DÉFINITION

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient (U_n) une suite de matrices colonnes de format $k \times 1$ définie par la donnée de U_0 et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$, avec A une matrice carrée d'ordre k et B une matrice colonne de format $k \times 1$.

On appelle **état stable** de la suite (U_n) une matrice colonne S de format $k \times 1$ telle que $S = AS + B$.

PROPRIÉTÉ

Si la matrice $I - A$ est inversible, alors la suite (U_n) ci-dessus admet un état stable S tel que $S = (I - A)^{-1}B$.

DÉMONSTRATION

$S = AS + B \iff S - AS = B \iff (I - A)S = B$.
Si $I - A$ est inversible, alors on a $S = AS + B \iff S = (I - A)^{-1}B$.

EXEMPLE

Soit (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $I - A$, où I est la matrice identité d'ordre 2, et justifier alors que $I - A$ est inversible.

2) En déduire que la suite (U_n) admet un état S que l'on déterminera.

PROPRIÉTÉ

On reprend les données de la propriété précédente.
Alors pour tout entier naturel n, $U_n = A^n(U_0 - S) + S$.

DÉMONSTRATION

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - S$.
Alors $V_{n+1} = U_{n+1} - S = AU_n + B - S = AU_n + (I - A)S - S = AU_n + S - AS - S = AU_n - AS = A(U_n - S) = AV_n$.
Donc pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$,
et ainsi, pour tout entier naturel n, $U_n = V_n + S = A^n V_0 + S = A^n(U_0 - S) + S$.

EXEMPLE

On reprend les données de l'exemple précédent.
Exprimer U_n en fonction de n et de A.