Seconde – Chapitre 06

FONCTIONS AFFINES ET DROITES

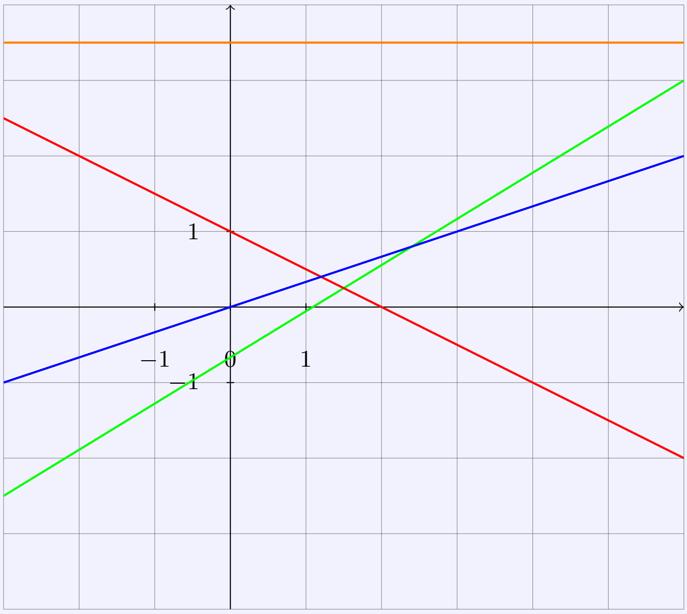

Table des matières

I Étude des fonctions affines

1) Définitions

DÉFINITIONS

• Soient m et p deux réels fixés.
On appelle **fonction affine** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
• Si $p = 0$, alors la relation devient $f(x) = mx$. On dit que f est une **fonction linéaire**.
• Si $m = 0$, alors la relation devient $f(x) = p$. On dit que f est une **fonction constante**.

EXEMPLES

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$ est une fonction affine, avec $m = -2$ et $p = 3$.
• La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2}{5}x$ est une fonction linéaire (et donc c'est aussi une fonction affine), avec $m = \frac{2}{5}$ et $p = 0$.

EXERCICES

Parmi les fonctions suivantes, dire celles qui sont des fonctions affines et donner alors m et p :
• $f : x \mapsto 5 - 3x$; • $g : x \mapsto 4x^2 + 1$; • $h : x \mapsto \dfrac{1 - 5x}{2}$

2) Représentation graphique d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ admise

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite et cette droite est non parallèle à l'axe des ordonnées.

REMARQUES

• Si f est une fonction linéaire, alors elle est représentée par une droite passant par l'origine du repère.
• Si f est une fonction constante, alors elle est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

EXEMPLE

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ en déterminant l'image de deux nombres par la fonction f.

DÉFINITIONS

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec m et p des réels.
• Le réel m est appelé le **coefficient directeur** de la droite représentative de f.
• Le réel p est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentative de f.

PROPRIÉTÉS

Soient f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec m et p des réels, et d la droite représentative de la fonction f dans un repère.
Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points **distincts** de la droite d.

• $m = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

• p est l'image de 0 par la fonction f, donc p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

DÉMONSTRATION

• $A(x_A\,;y_A)$ appartient à la droite d, droite représentative de la fonction f définie par $f(x) = mx + p$.
Donc $f(x_A) = mx_A + p$, donc $y_A = mx_A + p$.
De même, $y_B = mx_B + p$.

Donc $y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = mx_B + p - mx_A - p = mx_B - mx_A = m(x_B - x_A)$.

Or A et B sont deux points distincts de la droite d et cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc $x_B \neq x_A$, donc $x_B - x_A \neq 0$.

Ainsi, en divisant chaque membre de l'égalité $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$ par $x_B - x_A$, on a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

• $f(0) = m \times 0 + p = 0 + p = p$ donc p est bien l'image de 0 par la fonction f.

REMARQUE

Si $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, alors on a aussi $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.
En effet, $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1 \times (y_B - y_A)}{-1 \times (x_B - x_A)} = \dfrac{-y_B + y_A}{-x_B + x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

EXEMPLE

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(-1) = -4$ et $f(3) = 8$.
Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x, pour tout réel x.

Correction :

f est une fonction affine donc pour tout réel x, $f(x) = mx + p$ avec m et p deux réels.
$m = \dfrac{f(-1) - f(3)}{-1 - 3} = \dfrac{-4 - 8}{-4} = \dfrac{-12}{-4} = \boxed{3}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + p$.

Pour calculer p, on remplace x, au choix, par -1 ou par 3 (car on connait les images de ces deux réels) :
$f(-1) = 3 \times (-1) + p$, donc $-4 = -3 + p$, donc $p = -4 + 3 = \boxed{-1}$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 1}$

EXERCICE

Construire la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 1$ en utilisant son coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

3) Variations d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec m et p deux réels.
- Si $m > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

• Cas où $m > 0$:
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrons que $f(a) < f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) > 0$.
$f(b) - f(a) = mb + p - (ma + p) = mb + p - ma - p = mb - ma = m(b - a)$.
Or $m > 0$ et $b - a > 0$ (car $a < b$), donc $m(b - a) > 0$, donc $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$.
On retrouve la définition d'une fonction strictement croissante.
Donc si $m > 0$, alors f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Cas où $m < 0$:
On fait de même, on a alors toujours $f(b) - f(a) = m(b - a)$.
Mais ici, $m < 0$, et $b - a > 0$, donc $m(b - a) < 0$, donc $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$.
On retrouve la définition d'une fonction strictement décroissante.
Donc si $m < 0$, alors f est bien strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Cas où $m = 0$:
Alors pour tout réel x, $f(x) = 0x + p = p$. On retrouve l'expression d'une fonction constante.
Donc si $m = 0$, alors f est bien une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

Déterminer les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$:
• $f : x \mapsto 4x - 5$; • $g : x \mapsto -5x + 2$; • $h : x \mapsto 3 - 2x$;

4) Signe d'une fonction affine

DÉFINITION

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec m et p des réels et $m \neq 0$.
On appelle **racine de** f le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
Le point de coordonnées $(x_0\,;0)$ est le point d'intersection de la droite représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses.

PROPRIÉTÉ admise

On reprend les notations ci-dessus.

Si $m > 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

EXEMPLES

Dresser les tableaux de signes des fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x - 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -\frac{1}{4}x + 5$$

II Équations de droites

Dans toute cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Vecteur directeur d'une droite

PROPRIÉTÉ & DÉFINITION — admises

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et A un point.
L'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires est une droite d passant par A.
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est appelé un **vecteur directeur** de la droite d.

REMARQUES

- Tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.
- Si A et B sont deux points distincts de la droite d, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.

PROPRIÉTÉ — admise

Soient d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

EXEMPLE

Soit d la droite passant par le point $A(2\,;4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Soit d' la droite passant par le point $B(-1\,;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$.

Les droites d et d' sont-elles parallèles ?

PROPRIÉTÉ — admise

Soient m et m' deux réels.
Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

EXEMPLE

Démontrer que les droites d_1 d'équation $y = 2x - 3$ et d_2 d'équation $6x - 3y + 8 = 0$ sont parallèles.

2) Équation réduite et équation cartésienne d'une droite

PROPRIÉTÉ & DÉFINITION admises

Soit m et p deux réels.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $y = mx + p$ est une **droite**.
L'égalité $y = mx + p$ est appelée **l'équation réduite** de la droite. Elle est unique.

EXEMPLE

Tracer la droite d d'équation réduite $y = \dfrac{1}{3}x - 1$.

REMARQUES

- Une équation de droite est donc une égalité vérifiée par les coordonnées de tous les points appartenant à cette droite : si d est une droite d'équation $y = mx+p$, alors $A(x_A\,;y_A) \in d \iff y_A = mx_A+p$.

- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = c$, où c est un réel.

- $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$. Une telle équation est appelée **équation cartésienne**. Elle n'est pas unique. Par exemple, $2x + y + 5 = 0$ et $4x + 2y + 10 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite.

EXEMPLE

Soit d une droite dont une équation cartésienne est $2x + 3y + 6 = 0$.
Déterminer son équation réduite, et préciser alors son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

3) Déterminer une équation de droite

EXEMPLE

Soit d la droite passant par le point $A(2\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } M(x\,;y) \in d &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-5\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires.}\\
&\iff \det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix}x-2 & 4\\ y-5 & 3\end{vmatrix} = 0\\
&\iff 3(x-2) - 4(y-5) = 0\\
&\iff 3x - 6 - 4y + 20 = 0\\
&\iff \boxed{3x - 4y + 14 = 0}
\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de la droite d est $3x - 4y + 14 = 0$.

REMARQUES

• On peut alors obtenir son équation réduite en isolant la variable y dans l'équation cartésienne trouvée ci-dessus : $3x - 4y + 14 = 0 \iff -4y = -3x - 14 \iff y = \dfrac{-3x-14}{-4} \iff \boxed{y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{2}}$

L'équation réduite de la droite d est donc $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{2}$.

• On peut aussi déterminer l'équation réduite d'une droite en déterminant son coefficient directeur, puis son ordonnée à l'origine, comme vu dans la 1ère partie de ce chapitre avec les fonctions affines ! Mais dans la pratique, c'est moins rapide que la méthode au-dessus.

EXERCICE

Soit d la droite passant par $E(-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

2) En déduire son équation réduite, son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

EXERCICE

Soient deux points $A(4\,;-1)$ et $B(-3\,;5)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) puis son équation réduite.

2) Retrouver son équation réduite sans passer par une équation cartésienne.

4) Exploiter une équation cartésienne d'une droite

PROPRIÉTÉ admise

Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne soient pas simultanément nuls.

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Soit d la droite d'équation cartésienne $2x + 5y - 4 = 0$.
Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d.

EXERCICE

Soit d la droite d'équation cartésienne $-3x + 2y + 5 = 0$.

1) Le point $B(1\,;-1)$ appartient-il à la droite d ?

2) Donner les coordonnées d'un autre point appartenant à la droite d.

3) Déterminer l'équation réduite de la droite d.

4) La droite d' : $6x - 4y + 1 = 0$ est-elle parallèle à la droite d ?

III Systèmes d'équations

1) Système linéaire de deux équations à deux inconnues

DÉFINITION

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

EXEMPLE

$\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y.

DÉFINITION

Une **solution** d'un système de deux équations à deux inconnues est un couple de valeurs $(x\,;y)$ pour lequel les deux égalités sont vraies simultanément.

EXEMPLE

On reprend le système ci-dessus, à savoir $\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$.

- Le couple $(6\,;0)$ est-il solution de ce système ?
- Le couple $(1\,;2)$ est-il solution de ce système ?

DÉFINITION

Résoudre un système, c'est déterminer tous les couples solutions du système.

2) Comment résoudre un système

a Résoudre un système par la méthode par substitution

Résoudre le système $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases}$:

$$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+2y=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$$

On exprime une inconnue (ici y) en fonction de l'autre dans une des deux équations (ici la deuxième).

$$\iff \begin{cases} 3x+2(8+2x)=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$$

On remplace y par $8+2x$ dans l'autre équation (ici la première).

$$\iff \begin{cases} 7x+16=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$$

On simplifie.

$$\iff \begin{cases} x=-\dfrac{21}{7} \\ y=8+2x \end{cases}$$

On résout l'équation d'inconnue x.

$$\iff \begin{cases} x=-3 \\ y=8+2\times(-3) \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans la 2e équation.

$$\iff \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

On achève le calcul de y.

Conclusion : ce système admet une unique solution : le couple $(-3\,;2)$

REMARQUE

Cette méthode a des limites : elle peut très vite devenir très calculatoire si aucune des inconnues x et y n'est facilement isolable, par exemple dans le système $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$ qui nécessiterait de gros calculs (avec des fractions...) pour résoudre le système avec cette méthode. Voilà pour quoi il existe une autre méthode...

b Résoudre un système par la méthode par combinaison

Résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$:

$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+6y=2 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$ On multiplie chaque membre de la 1ère équation par 2.

$\iff \begin{cases} 11y=-11 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$ On additionne membre à membre les deux équations pour obtenir une équation à une seule inconnue y.

$\iff \begin{cases} y=-1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$ On résout l'équation d'inconnue y.

$\iff \begin{cases} y=-1 \\ -4x+5\times(-1)=-13 \end{cases}$ On remplace y par sa valeur dans la 2e équation.

$\iff \begin{cases} y=-1 \\ -4x=-13+5 \end{cases}$ On résout l'équation d'inconnue x.

$\iff \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ On achève le calcul de x.

Conclusion : Ce système admet une unique solution : $\boxed{\text{le couple } (2\,;-1)}$

3) Lien entre les droites et les systèmes

PROPRIÉTÉ admise

Soient les droites d d'équation $ax+by+c=0$ et d' d'équation $a'x+b'y+c'=0$, avec a, b, c, a', b' et c' des réels.

Soit $\mathcal{S}$ le système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

Un point M appartient à d et à d' si et seulement si le couple $(x\,;y)$ formé de ses coordonnées est solution du système $\mathcal{S}$.

EXEMPLE

On reprend le système précédent $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$.

La solution de ce système est le couple $(2\,;-1)$ donc le point $A(2\,;-1)$ appartient à la droite d d'équation $2x+3y-1=0$ et à la droite d' d'équation $-4x+5y+13=0$. Il s'agit de leur (unique) point d'intersection.

PROPRIÉTÉ admise

On reprend les notations de la propriété précédente.

• Si d et d' sont sécantes, alors elles ont un **unique** point d'intersection : le système $\mathcal{S}$ admet une unique solution, le couple formé par les coordonnées du point d'intersection.

• Si d et d' sont strictement parallèles, alors elles n'ont **aucun** point d'intersection : le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.

• Si d et d' sont confondues, alors elles ont une **infinité** de points en commun : le système $\mathcal{S}$ admet une infinité de solutions.

EXEMPLE

Soit d la droite d'équation $6x - 4y + 1 = 0$ et d' la droite d'équation $-3x + 2y + 5 = 0$.

1) Résoudre le système $\mathcal{S} : \begin{cases} 6x - 4y + 1 = 0 \\ -3x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$.

2) Que peut-on en déduire pour les droites d et d' ?

3) Comment pouvait-on retrouver ce résultat à partir des équations des deux droites ?