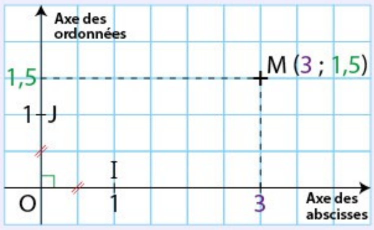
5 Vecteurs et opérations

FICHE 31 Bien démarrer

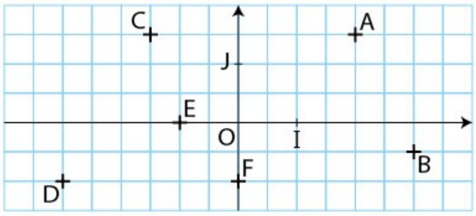
▸ Un **repère** (O; I, J) est **orthonormé** lorsque le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.

▸ Dans le repère (O; I, J) ci-contre :
- 3 est **l'abscisse** du point M,
- 1,5 est **l'ordonnée** du point M,
- (3 ; 1,5) sont les coordonnées du point M.



1 Lire des coordonnées de points

On a placé les points A, B, C, D, E, F dans le repère orthonormé (O; I, J) ci-dessous.



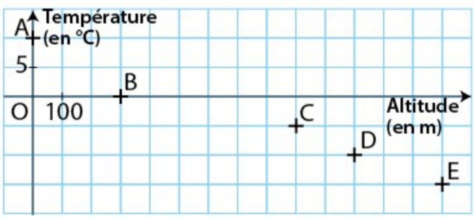
a. Lire les coordonnées de ces points.
- A(........;........)
- B(........;........)
- C(........;........)
- D(........;........)
- E(........;........)
- F(........;........)

b. Le point G a la même ordonnée que A et a pour abscisse l'opposée de celle de D.
Indiquer les coordonnées de G : G(........;........).

c. Lire les coordonnées :
- du milieu du segment [EF] : ....
- du milieu du segment [AB] : ....

2 Lire des coordonnées sur un graphique

Des alpinistes ont relevé les températures lors d'une ascension. Elles sont indiquées ci-dessous.



a. Compléter ce tableau.

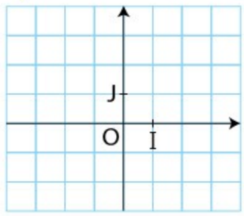
Point	A	B	C	D	E
Abscisse	....	....	....	....	....
Ordonnée	....	....	....	....	....

b. Lire les coordonnées du milieu I de [BC] : ....
Interpréter ces coordonnées.

....

3 Placer des points dans un repère

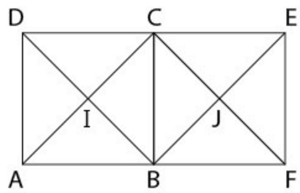
Placer les points ci-dessous dans le repère (O; I, J).



- L(−3; 1)
- M(1; 2)
- N(−1; −1)
- P(3; −2)
- Q(−3; −1)
- R(0; 3)
- S(2; 0)
- T(−2; 3)

4 Utiliser une figure

ABCD et BCEF sont deux carrés de centres I et J.



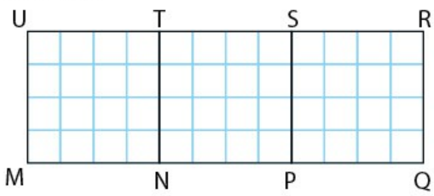
On considère le repère orthonormé (A; B, D).

a. Lire les coordonnées de tous les points de la figure :
- A..........
- B..........
- C..........
- D..........
- E..........
- F..........
- I..........
- J..........

b. Placer les points K, L, M dont les coordonnées sont :
- K$\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$
- L$\left(\dfrac{1}{2}\,;1\right)$
- M$\left(2\,;\dfrac{1}{2}\right)$

5 Placer selon le repère

Voici trois carrés.

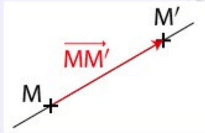


a. Placer les points A$\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et B$\left(2\,;\dfrac{1}{4}\right)$ dans le repère orthonormé (M; N, U).

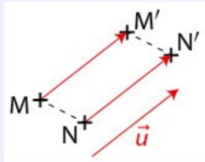
b. Placer les points C $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et D $\left(2\,;\dfrac{3}{4}\right)$ dans le repère orthonormé (N; P, T).

FICHE 32 Notion de vecteur

- M et M′ sont deux points distincts du plan. La **translation** qui transforme M en M′ est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{MM'}$.
  Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour **direction** celle de la droite (MM′), pour **sens** celui de M vers M′ et pour **norme** la longueur MM′.



- **Vecteurs particuliers**
  Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est le **vecteur nul** ; il est noté $\vec{0}$.
  Le **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{MN}$ est le vecteur $\overrightarrow{NM}$.
- **Égalité de vecteurs**
  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ équivaut à MM′N′N est un parallélogramme (éventuellement aplati).
  Sur la figure, $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. On dit que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.



Deux calculs

- Calculer la moyenne des notes : 15 ; 12 ; 7 ; 8 ; 13.

....

....

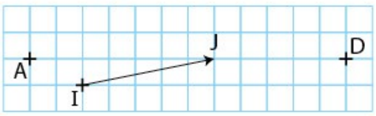
....

- Résoudre l'équation $6x - 1 = -4x + 9$.

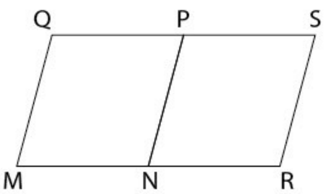
....

★

1 La translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ transforme A en B et C en D. Construire les points B et C.



2 MNPQ et NRSP sont deux parallélogrammes superposables.



a. Compléter : par la translation de vecteur $\overrightarrow{PS}$,

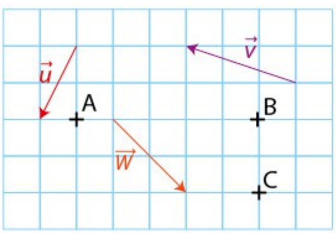
- l'image de Q est ....
- l'image de N est ....
- l'image de P est ....
- l'image de M est ....

b. Compléter les égalités :

- $\overrightarrow{QS} =$ ....
- $\overrightarrow{QN} =$ ....
- $\overrightarrow{NS} =$ ....

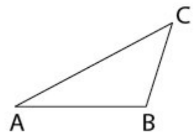
3 Placer les points I, J, K tels que :

- $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$
- $\vec{v} = \overrightarrow{BJ}$
- $\vec{w} = \overrightarrow{KC}$



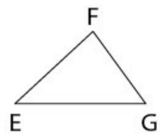
4 Avec la règle et le compas, construire les points I, J, K tels que :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$
- C est l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



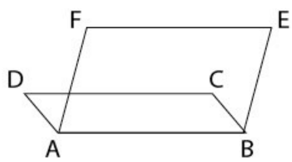
★★

5 **a.** Avec la règle et le compas, construire l'image F′ de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$ et le point G′ tel que $\overrightarrow{EG'} = \overrightarrow{GE}$.



b. Démontrer que FF′EG′ est un parallélogramme.

6 ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes.

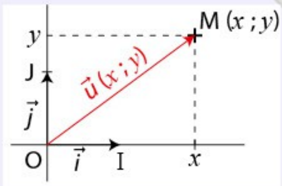


a. Quelle est la nature du quadrilatère CDFE ? Justifier.

b. En déduire un vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{CE}$.

FICHE 33 Coordonnées de vecteurs

▸ Le repère orthonormé (O; I, J) est aussi noté $(\mathbf{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$. On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormée**.



▸ Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

▸ **Calculs avec les coordonnées** (dans un repère orthonormé)

- $\vec{u}(x ; y) = \vec{v}(x'; y')$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
- La norme du vecteur $\vec{u}(x ; y)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées :
$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$
- $\mathbf{AB} = \|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Deux calculs

- $f(x) = 4x^2 - x + 1$. Calculer $f(-2)$

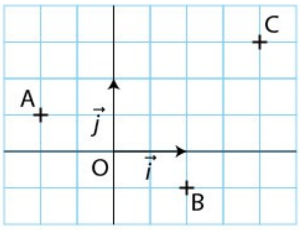
....

- Développer et réduire $A = -2(x + 1)(x + 3)$.

....

★

1 **a.** Lire les coordonnées des vecteurs :



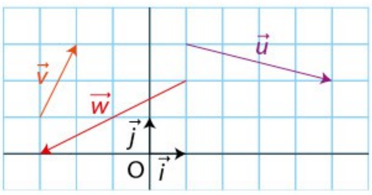
- $\overrightarrow{AB}$ ....
- $\overrightarrow{AC}$ ....
- $\overrightarrow{BC}$ ....
- $\overrightarrow{CB}$ ....

b. En déduire les longueurs suivantes :

- AB = ...
- AC = ...
- BC = ...

c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

2 **a.** Lire les coordonnées des vecteurs :



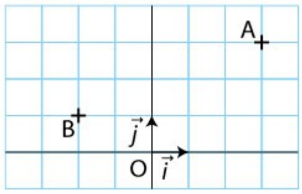
- $\vec{u}$ ....
- $\vec{v}$ ....
- $\vec{w}$ ....

b. Calculer la norme de chacun de ces vecteurs.

3 **1.** Représenter les vecteurs $\vec{u}(3 ; 2)$ et $\vec{v}(-3 ; 4)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. Déterminer les coordonnées des points M et N tels que :

a. $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ **b.** $\overrightarrow{BN} = \vec{v}$



★★

4 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
R(1; 3), S(−2; 4), T(−5; −2) et U(−8; −1)

a. Déterminer les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [RU] et [ST].

b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère RSUT ?

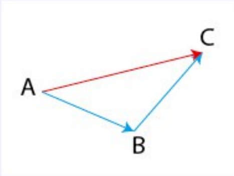
5 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
A(4; 1), B (7; 4) et C (11; 0)

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

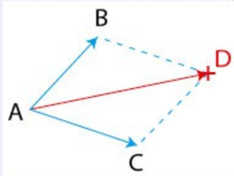
FICHE 34 Somme de vecteurs

▸ **Relation de Chasles**
Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



▸ **Règle du parallélogramme**
Pour tous points A, B et C :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.



▸ Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, alors $\vec{u}+\vec{v}(x+x'\,;y+y')$.

Deux calculs

- Calculer $A = 2\left(1-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{2}{3}$.

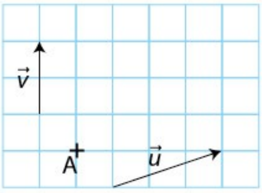
....

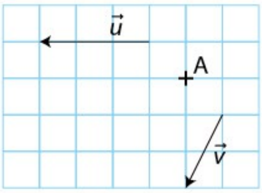
- Factoriser $B = x^2 - 9$.

....

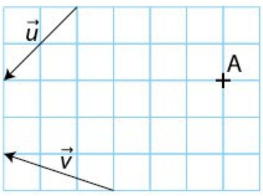
★

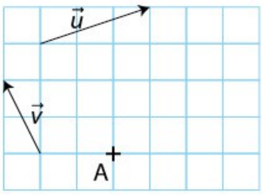
1 Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant la relation de Chasles.



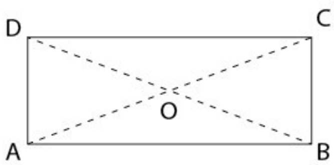


2 Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant la règle du parallélogramme.





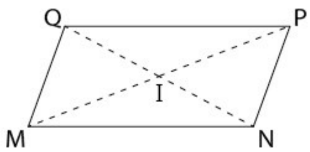
3 ABCD est un rectangle de centre O.
Construire :
- le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC}$;
- le représentant d'origine C du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DO}$;
- le représentant d'origine O du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$.



4 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$A(-2\,;3)$, $B(1\,;5)$, $C(-1\,;-4)$
Déterminer les coordonnées du point M tel que :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

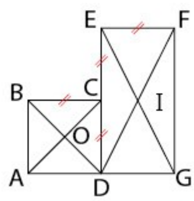
★★

5 MNPQ est un parallélogramme de centre I.



a. Construire le représentant d'origine N du vecteur :
$$\vec{u} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NM}.$$
b. Démontrer que $\vec{u} = \overrightarrow{NQ}$.

6 ABCD est un carré de centre O, DEFG est un rectangle de centre I. C est le milieu de [DE]. Justifier que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DG}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CE}$ sont égaux.



FICHE 35 Produit d'un vecteur par un nombre réel

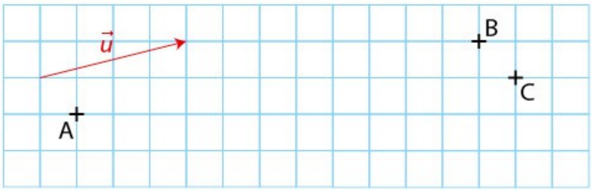
- $(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base orthonormée, λ un nombre réel et $\vec{u}(x\,;\,y)$ un vecteur.
  $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda x\,;\,\lambda y)$. De plus $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.
- Pour tous nombres réels λ, λ' et tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:
  - $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
  - $(\lambda+\lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$
  - $\lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$
  - $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
  - $-\vec{u}$ est le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.
- $\vec{u}(x\,;\,y)$ dans une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$ équivaut à $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Deux calculs

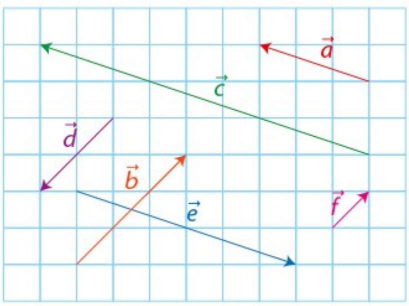
- Calculer la médiane de la liste suivante :
  5 - 10 - 12 - 7 - 9 - 18 - 20
- Dans un repère, une courbe a pour équation $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$ et $y \neq 1$). Exprimer x en fonction de y.

★

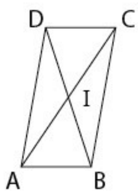
1 Représenter les vecteurs :
- $\vec{v}$ d'origine A tel que $\vec{v} = 2\vec{u}$
- $\vec{w}$ d'origine B tel que $\vec{w} = -\vec{u}$
- $\vec{z}$ d'origine C tel que $\vec{z} = -2{,}5\vec{u}$.



2 Compléter les pointillés avec un nombre réel.
- $\vec{c} = \ldots\,\vec{a}$
- $\vec{e} = \ldots\ldots\,\vec{a}$
- $\vec{a} = \ldots\ldots\,\vec{e}$
- $\vec{b} = \ldots\,\vec{f}$
- $\vec{f} = \ldots\ldots\,\vec{d}$
- $\vec{d} = \ldots\ldots\,\vec{f}$



3 ABCD est un parallélogramme de centre I.
Relier les vecteurs qui sont égaux.



$\overrightarrow{DB}$ •	• $-\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB}$ •	• $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{IC}$ •	• $2\overrightarrow{IB}$
$\overrightarrow{ID}$ •	• $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

4 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$A(1\,;-5)$, $B(3\,;2)$ et $C(-4\,;5)$.

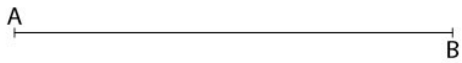
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs :
- $\overrightarrow{AB}$ ....
- $\overrightarrow{AC}$ ....

b. En déduire les coordonnées des vecteurs :
- $\vec{u} = -2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
- $\vec{v} = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

★★

5 Dans une base orthonormée $(\vec{i}\,,\vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i} - 14\vec{j}$.
Démontrer que $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

6 [AB] est un segment de longueur 6 cm. Placer le point M de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



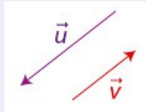
7 Dans une base orthonormée $(\vec{i}\,,\vec{j})$, on donne le vecteur $\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.

a. Calculer la norme de $\vec{u}$.

b. En déduire la norme de $\vec{v} = \vec{i} - \dfrac{3}{4}\vec{j}$.

FICHE 36 Colinéarité de vecteurs

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$, autrement dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Dans une base orthonormée, $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ sont deux vecteurs.
Le **déterminant** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est le nombre $xy' - x'y$.
- $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = \mathbf{0}$.



Deux calculs

- Quelle est la nature du nombre $\mathrm{F} = \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$?

....

- Développer et réduire $\mathrm{B} = (2x - 3)^2 + 4x$.

....

★

1 Relier chaque vecteur à un vecteur qui lui est colinéaire.

$\vec{a}\,(-2;3)$ •	• $\vec{t}\,(-3;2)$
$\vec{b}\,(-2;-3)$ •	• $\vec{u}\,(10;15)$
$\vec{c}\,(3;-2)$ •	• $\vec{v}\,(-4;6)$
$\vec{d}\,(3;2)$ •	• $\vec{w}\,(15;10)$

2 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

3 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne :
$\vec{u}\left(\dfrac{1}{3}\,;-1\right)$, $\vec{v}\left(2\,;-\dfrac{4}{3}\right)$, $\vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{z} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$.

a. Calculer le déterminant de chaque couple de vecteurs.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

....

- $\vec{u}$ et $\vec{w}$: ....
- $\vec{v}$ et $\vec{z}$: ....
- $\vec{w}$ et $\vec{z}$: ....

b. En déduire deux vecteurs colinéaires.

....

....

c. Donner les coordonnées d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

....

★★

4 A et B sont deux points donnés.
M et N sont des points tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \vec{0} \text{ et } -\overrightarrow{\mathrm{AN}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BN}} = \vec{0}.$$

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont colinéaires.

5 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}(a-1\ ;\ 4)$ et $\vec{v}(2\ ;\ a+1)$ où a désigne un nombre réel.
Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

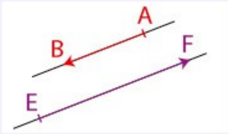
6 Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

a. $4\overrightarrow{\mathrm{AD}} - 4\overrightarrow{\mathrm{BD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{0}$

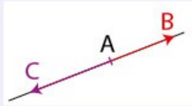
b. $\overrightarrow{\mathrm{CB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{0}$

FICHE 37 Reconnaître le parallélisme ou l'alignement

▸ Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.



▸ Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Deux calculs

• Sans calculatrice, déterminer $A = 1\,002^2 - 998^2$.

....

• Développer et réduire $A = 7 - (2 - 4x)^2$.

....

★

1 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $M(3\,;3)$, $N(8\,;5)$, $P(1\,;-2)$ et $Q(16\,;4)$.

a. Compléter avec les coordonnées.

• $\overrightarrow{MN}$ ....   • $\overrightarrow{PQ}$ ....

b. En déduire que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

....

....

2 A, B, C, M et N sont cinq points distincts tels que :

$$4\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \qquad 5\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

a. Vérifier que $\overrightarrow{CN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

....

b. En déduire que les droites (AM) et (CN) sont parallèles.

....

....

3 A, B, E, F sont des points tels que $6\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = 5\overrightarrow{AF}$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{EF}$.

....

....

b. Que peut-on dire des droites (AB) et (EF) ?

....

....

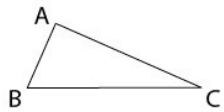
4 Dans un repère orthonormé, étudier l'alignement des points $R(-3\,;-2)$, $S(4\,;1)$, $T(6\,;2)$.

5 **a.** Placer sur la figure ci-dessous :

• l'image M du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,

• le milieu N du segment [AM],

• le point P symétrique de C par rapport à N.

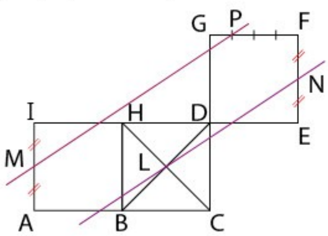


b. Démontrer que les points A, B, P sont alignés.

★★

6 ABHI, BCDH, DEFG sont des carrés de même côté avec D milieu de [CG].

L est le centre du carré BCDH, M et N sont les milieux des segments [AI] et [EF]. P est le point vérifiant $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.



Utiliser le repère orthonormé (B; C, H) pour démontrer que les droites (MP) et (LN) sont parallèles.