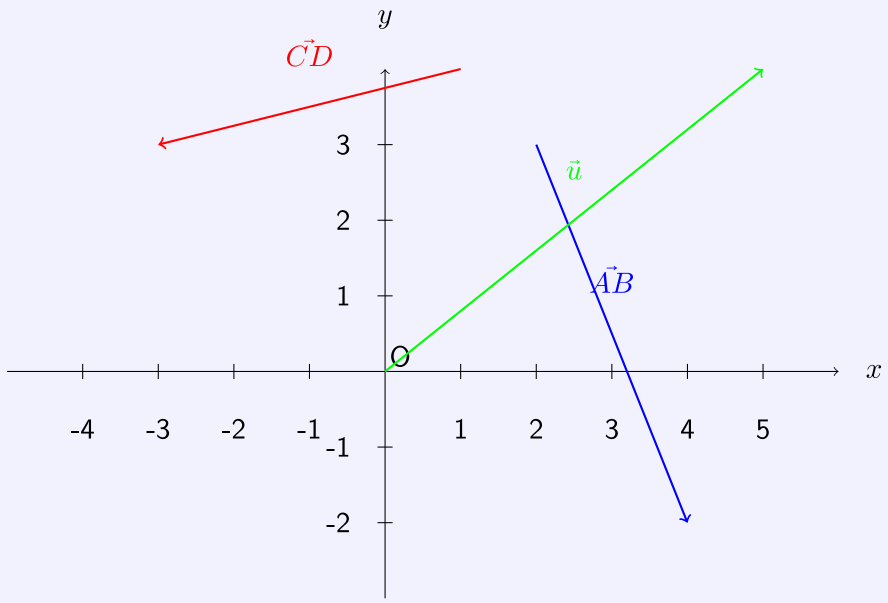
Seconde – Chapitre 04

# VECTEURS




## Table des matières

# I Vecteurs du plan

## 1) Définitions

**DÉFINITION**

Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan qui transforme le point $A$ en $B$.

$$A \longrightarrow B$$

**DÉFINITIONS**

Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
- sa **norme** : la longueur $AB$ ;
- sa **direction** : l'inclinaison de la droite $(AB)$ ;
- son **sens** : de $A$ vers $B$.

Il définit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui transforme $A$ en $B$.

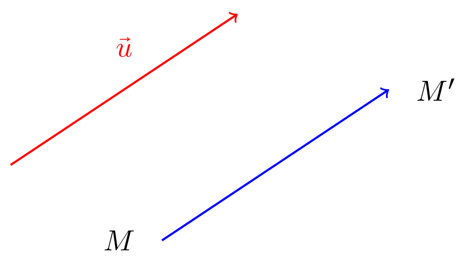
Le point $A$ est appelé **l'origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point $B$ est appelé son **extrémité**.

### REMARQUES

- La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$ (et on a $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$).

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé le **vecteur nul** et se réduit au point $A$. On le note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
Le vecteur nul n'a pas de direction, pas de sens, et a pour norme 0.

- On peut choisir de définir la translation par un seul vecteur, non associé à des points, que l'on peut noter $\vec{u}$. Quel que soit le point $M$, si $M$ a pour image $M'$ par la translation de vecteur $\vec{u}$, on a alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ et on dit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un **représentant** du vecteur $\vec{u}$ d'origine $M$.




**DÉFINITION**

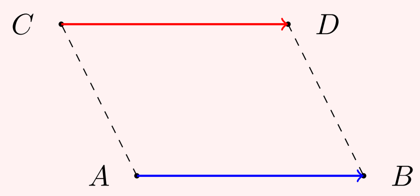
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
L'égalité $\vec{u} = \vec{v}$ signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

## 2) Propriétés

**PROPRIÉTÉ**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points distincts du plan.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$




**DÉMONSTRATION**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB = CD$ et $(AB)//(CD)$ et le sens de $A$ vers $B$ est le même que celui de $C$ vers $D$.
$\iff ABDC$ est un parallélogramme.

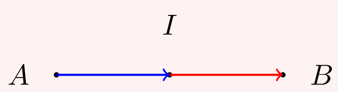
**REMARQUE**

Cette propriété est très utile pour démontrer rapidement qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

**PROPRIÉTÉ**

Soient $A$, $B$ et $I$ trois points du plan. Alors :

$$I \text{ est le milieu du segment } [AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

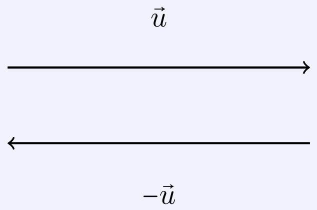



**DÉMONSTRATION**

$I$ est le milieu de $[AB] \iff I \in [AB]$ et $IA = IB$
$\iff$ Les points $A$, $I$ et $B$ sont alignés dans cet ordre et $IA = IB$.
$\iff$ Les droites $(AI)$ et $(IB)$ sont parallèles, le sens de $A$ vers $I$ est celui de $I$ vers $B$ et $IA = IB$.
$\iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

**DÉFINITION**

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
**L'opposé** du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ tel que $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ soient de même direction, de même norme, mais **de sens contraires**.



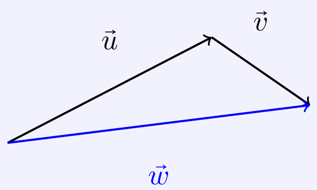

## REMARQUES

- On a alors $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
- On a alors, pour deux points $A$ et $B$ du plan, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

## 3) Somme de vecteurs

**DÉFINITION**

La translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.




## REMARQUE

On a alors, pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan :
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

**PROPRIÉTÉ**

Pour tous points $A$, $B$ et $C$ du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette égalité est appelée la **relation de Chasles**.

## DÉMONSTRATION

La translation qui transforme $A$ en $B$ suivie de la translation qui transforme $B$ en $C$ est donc la translation qui transforme $A$ en $C$, et on a donc bien $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

## EXEMPLE

Simplifier les écritures suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

**1)** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

**2)** $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

**3)** $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

**4)** $\vec{k} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC}$

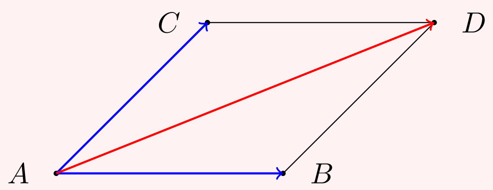
## EXERCICE

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer que pour tout point $M$ du plan, $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

## PROPRIÉTÉ

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$




## DÉMONSTRATION

• Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, soit encore $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

• Réciproquement, si $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, soit encore $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.

# II Colinéarité de vecteurs

## 1) Produit d'un vecteur par un réel

## PROPRIÉTÉ admise

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et $k$ un réel non nul.
On appelle **produit du vecteur $\vec{u}$** par le réel $k$ le vecteur noté $k\vec{u}$ :
• de même direction que $\vec{u}$ ;
• de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens de contraire si $k < 0$ ;
• de norme $|k| \times \|\vec{u}\|$, c'est-à-dire $k \times \|\vec{u}\|$ si $k > 0$, et $-k \times \|\vec{u}\|$ si $k < 0$.

## REMARQUE

Par définition, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $k = 0$, alors par définition, $k\vec{u} = \vec{0}$.

### EXEMPLE

Soit $ABC$ un triangle.

**1)** Placer les points $D$ et $E$ tels que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

**2)** Déterminer le réel $k$ tel que $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AB}$.

### PROPRIÉTÉS admises

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et soient $k$ et $k'$ deux réels. Alors :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

### EXERCICE

Soient $A$ et $B$ deux points tels que $AB = 6$ cm.
Placer les points $M$ et $N$ tels que $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

## 2) Vecteurs colinéaires

### DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

### REMARQUES

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

## 3) Lien avec le parallélisme et l'alignement

### PROPRIÉTÉ admise

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan.
Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

### EXEMPLE

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points tels que $5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
Démontrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

### PROPRIÉTÉ admise

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan.
Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

### EXEMPLE

Soit $ABC$ un triangle, et soient $M$ et $N$ les points tels que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{BA}$.

**1)** Faire une figure.

**2)** Montrer que $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**3)** En déduire que les points $B$, $M$ et $N$ sont alignés.

# III Vecteurs dans un repère

Dans cette partie, on se place dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
On notera $\vec{\imath}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
Le couple formé des deux vecteurs $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est appelé une **base orthonormée**.

## 1) Coordonnées d'un vecteur

### PROPRIÉTÉ — admise

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'écrit sous la forme $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, où $x$ et $y$ sont des réels que l'on appelle **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

On note $\vec{u}(x\,;y)$ ou bien $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

### REMARQUES

- Les réels $x$ et $y$ sont uniques pour le vecteur $\vec{u}$.
- $\vec{0} = 0 \times \vec{\imath} + 0 \times \vec{\jmath}$ donc le vecteur nul a pour coordonnées $(0\,;0)$.

### EXEMPLE

Dans un repère orthonormé du plan :

**1)** Placer les vecteurs $\vec{u}(2\,;3)$ et $\vec{v}(-4\,;2)$.

**2)** Placer les points $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

### PROPRIÉTÉ — admise

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
Alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\,;y + y')$.

### EXEMPLE

- Tracer dans un repère les vecteurs $\overrightarrow{u}(2\,;1)$ et $\overrightarrow{v}(0\,;2)$.
- Construire sur ce même repère le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et lire ses coordonnées, puis vérifier la propriété ci-dessus.

### PROPRIÉTÉ — admise

Soit $\vec{u}(x\,;y)$ un vecteur dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ et soit $k$ un réel.
Alors le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx\,;ky)$.

### EXEMPLE

• Tracer dans un repère le vecteur $\overrightarrow{u}(2\,;1)$.
• Construire sur ce même repère les vecteurs $3\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$ et lire leurs coordonnées, puis vérifier la propriété ci-dessus.

### PROPRIÉTÉ — admise

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$.

### EXEMPLE

Soient $A(4\,;5)$, $B(-1\,;2)$ et $C(0\,;-2)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

### PROPRIÉTÉ — admise

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales.

### EXEMPLE

Soient $A(1\,;-5)$, $B(3\,;-9)$, $C(4\,;-1)$ et $D(6\,;-5)$.
Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

## 2) Coordonnées du milieu d'un segment et norme d'un vecteur

### PROPRIÉTÉ — admise

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan.
Alors le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

### EXEMPLE

Soient $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$ et $C(0\,;1)$.
Soit $I$ le milieu du segment $[BC]$ et soit $J$ le milieu du segment $[AI]$.

**1)** Calculer les coordonnées des points $I$ et $J$.

**2)** Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$.

### EXERCICE

Soient $A(-2\,;-3)$, $B(5\,;0)$, $C(0\,;7)$, et soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$.

**1)** **a)** Calculer les coordonnées du milieu $I$ du segment $[BC]$.

**b)** Quel est le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$ ?

**c)** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

**d)** En déduire celles de $\overrightarrow{AG}$ puis celles de $G$.

**2)** Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

**PROPRIÉTÉ**

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan, et $\vec{u}(x\,;y)$ un vecteur du plan.
Alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

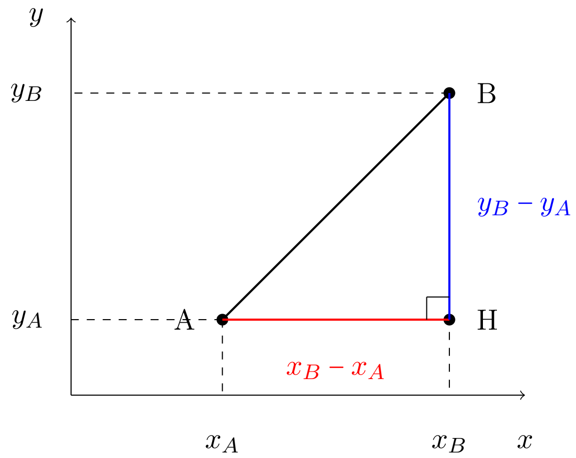
**DÉMONSTRATION**

Cette propriété découle immédiatement du théorème de Pythagore !

Le triangle $ABH$ est rectangle en $H$, donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 = AH^2 + HB^2$.

En remplaçant par les coordonnées, on a alors :

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.




**EXEMPLE**

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer la distance $AB$ :

**1)** $A(2\,;-3)$ et $B(4\,;5)$

**2)** $A(-3\,;-\sqrt{2})$ et $B(1\,;2\sqrt{2})$.

**EXERCICE**

Soient $A(-4\,;-1)$, $B(4\,;-2)$, $C(8\,;5)$ et $D(0\,;6)$.

**1)** **a)** Démontrer que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

**b)** Calculer les distances $AB$ et $BC$.

**2)** En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

## 3) Déterminant de deux vecteurs

**DÉFINITION**

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $xy' - x'y$.

**REMARQUE**

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$ ou bien directement à partir des coordonnées des deux vecteurs sous la forme $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

## EXEMPLE

Soient $\vec{u}(3\,;2)$ et $\vec{v}(-1\,;1)$. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

## PROPRIÉTÉ

On reprend les notations de la définition précédente.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si leur déterminant $xy' - x'y$ est nul.

## DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v} \\
&\iff \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases} \\
&\iff \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} k = \dfrac{x'}{x} \\ k = \dfrac{y'}{y} \end{cases} \\
&\iff \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \\
&\iff xy' = x'y \\
&\iff xy' - x'y = 0
\end{aligned}$$

## EXEMPLES

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**1)** $\vec{u}(2\,;-5)$ et $\vec{v}(-4\,;10)$.

**2)** $\vec{u}(-3\,;1)$ et $\vec{v}(2\,;-1)$.

## REMARQUE

Deux vecteurs sont donc colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles.

## EXEMPLE

Sans passer par le calcul du déterminant, démontrer que les vecteurs $\vec{u}(1\,;3)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$ sont colinéaires.

## EXERCICE

• Soient $A(4\,;-1)$, $B(7\,;-3)$ et $C(-5\,;5)$.

Démontrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

• Soient $M\left(-1\,;\frac{3}{2}\right)$, $N\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$, $P\left(0\,;\frac{5}{2}\right)$ et $R\left(\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

**1)** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PR}$.

**2)** Démontrer que les droites $(MN)$ et $(PR)$ sont sécantes.