Seconde – Chapitre 03

CALCUL LITTÉRAL ET APPLICATIONS

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Table des matières

I Expression littérale

1) Définition

DÉFINITION

Une expression littérale est une expression mathématique dans laquelle une (ou plusieurs) valeur(s) sont remplacées par une (ou plusieurs) lettre(s).

EXEMPLES

- $3x+2$; $(5x+1)^2$; $2y-3$; $\dfrac{x}{y}$; $a+b+c$
- L'aire d'un disque de rayon R est une expression littérale : πR^2.
- Le périmètre d'un rectangle de longueur ℓ et de largeur L est une expression littérale : $2\ell+2L$.

2) Développement et Factorisation

DÉFINITION

- Développer, c'est transformer en **somme** une expression écrite sous la forme d'un produit.
- Factoriser, c'est transformer en **produit** une expression écrite sous la forme d'une somme.

PROPRIÉTÉS admises

Soient a, b, c, d, et k des réels. Alors :

- $k(a+b)=ka+kb$; • $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

EXEMPLES

Développer les expressions suivantes, dans lesquelles x et y sont des réels :

$A=3(2x+1)+5(3-x)$ $\quad B=-2(x-1)+6$ $\quad C=3x^2+8x(x-1)$

$D=5x-3(x-2)$ $\quad E=(2x+4)(3+5x)$ $\quad F=(5x-1)(3-2x)$

$G=3x(5-3x)-(3+x)(2+4x)$ $\quad H=2x-5(x+1)(x-2)$ $\quad I=(2x+1)+3x(y+1)$

$J=(3x+2)(5-2y)$

Factoriser les expressions suivantes, dans lesquelles x est un réel :

$A=3x^2+6x$ $\quad B=15-5x$ $\quad C=12x^2-6x$

$D=4x^2+8x(x+1)$ $\quad E=(x+1)(3+x)+(x+1)(5+2x)$ $\quad F=(4x+3)^2+(3-x)(4x+3)$

$G=(3-5x)(x+2)-(3-5x)^2$

3) Identités remarquables

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels. Alors :

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

DÉMONSTRATION

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+ab+ab+b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-ab-ab+b^2 = \boxed{a^2-2ab+b^2}$
- $(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-ab+ab-b^2 = \boxed{a^2-b^2}$

EXEMPLES

Développer les expressions suivantes, dans lesquelles x est un réel :

$A = (2x+3)^2$ $\quad B = (3x-2)^2$ $\quad C = (x-1)(x+1)$ $\quad D = (6x-5)(6x+5)$

Factoriser les expressions suivantes, dans lesquelles x est un réel :

$A = 25x^2-16$ $\quad B = 9x^2-1$ $\quad C = 4x^2+4x+1$ $\quad D = 16x^2-24x+9$

II Résolution d'équation

1) Définition et vocabulaire

DÉFINITIONS

- Une **équation** est une égalité dans laquelle figurent une ou plusieurs **inconnues** désignées par des lettres.

- Une **solution** d'une équation d'inconnue x est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

- **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ une équation à une inconnue consiste à déterminer, si elles existent, toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée. Ces valeurs constituent **l'ensemble des solutions** de l'équation.

- Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dites **équivalentes**.

EXEMPLES

- $2x+3 = x^2$ est une équation d'inconnue x ; 3 est une solution de cette équation puisque si $x = 3$, alors d'une part $2x+3 = 2\times3+3 = 6+3 = 9$ et d'autre part, $x^2 = 3^2 = 9$ également, donc l'égalité est bien vérifiée.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2+5x+1 = 0$ revient à déterminer **toutes** les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité $3x^2+5x+1 = 0$ est vraie.

- Les deux équations $3x+2 = 0$ et $3x = -2$ sont **équivalentes**. On peut alors le noter ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x+2 = 0 \iff 3x = -2$$

EXERCICE

Démontrer que, pour tout réel x,

$$(3x-5)^2 - 4(x+1) = 6(x+1)^2 + (x-15)(3x-1)$$

2) Équation du premier degré à une inconnue

DÉFINITION

Une **équation du premier degré** à une inconnue x est une équation pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$, avec a et b des réels (et $a \neq 0$)

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x-1=x-9$.

REMARQUE

Attention, il faut toujours regarder dans quel ensemble la résolution doit-être faite.
Par exemple, pour l'équation précédente, si la résolution demandée est dans $\mathbb{N}$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

3) D'autres équations

PROPRIÉTÉ admise

Soient A et B des réels. Alors :

- $A \times B = 0 \iff A = 0$ **ou** $B = 0$
- $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ **et** $B \neq 0$

EXEMPLES

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-7)(-x+3)=0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+1}{x-5}=0$.

PROPRIÉTÉ

Soit a un réel.

- Si $a>0$, alors l'équation $x^2=a$ admet exactement **deux** solutions dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a=0$, alors l'équation $x^2=a$ admet **une unique** solution dans $\mathbb{R}$: 0.
- Si $a<0$, alors l'équation $x^2=a$ n'admet **aucune** solution dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

- **Cas où $a > 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = a \iff x^2 = (\sqrt{a})^2$
$$\iff x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$
$$\iff (x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$$
$$\iff x+\sqrt{a} = 0 \text{ ou } x-\sqrt{a} = 0$$
$$\iff \boxed{x = \sqrt{a}} \text{ ou } \boxed{x = -\sqrt{a}}$$

- **Cas où $a = 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = a \iff x^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$

- **Cas où $a < 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc l'équation $x^2 = a$ n'a $\boxed{\text{pas de solution dans } \mathbb{R}}$

III Résolution d'inéquations

1) Inégalités et propriétés

DÉFINITION

Une inégalité est une affirmation fondée sur l'un des signes suivants : $<$; $\leqslant$; $>$; $\geqslant$.

EXEMPLES

L'inégalité $5 > 2$ est une affirmation qui est vraie ; l'inégalité $3 \leqslant 3$ également.
En revanche, l'inégalité $4 \leqslant -1$ est une affirmation fausse.

PROPRIÉTÉ admise

On peut ajouter ou retrancher un même réel aux deux membres d'une inégalité, en conservant son sens.
Autrement dit, pour tous réels a, b et c :

- $a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$
- $a \leqslant b \iff a - c \leqslant b - c$

EXEMPLES

- $4 \geqslant -1 \iff 4 + 5 \geqslant -1 + 5 \iff 9 \geqslant 4$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x + 4 \leqslant 5 \iff 3x + 4 - 5 \leqslant 5 - 5 \iff 3x \leqslant 0$

PROPRIÉTÉ admise

- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement positif**, en **conservant** le sens de l'inégalité. Autrement dit, pour tous réels a, b et c, avec $c > 0$, on a :

$$a \leqslant b \iff a \times c \leqslant b \times c \quad \text{et} \quad a \leqslant b \iff \frac{a}{c} \leqslant \frac{a}{c}$$

- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement négatif**, en **changeant** le sens de l'inégalité. Autrement dit, pour tous réels a, b et c, avec $c < 0$, on a :

$$a \leqslant b \iff a \times c \geqslant b \times c \quad \text{et} \quad a \leqslant b \iff \frac{a}{c} \geqslant \frac{a}{c}$$

EXEMPLES

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x \geqslant 5 \iff \dfrac{3x}{3} \geqslant \dfrac{5}{3} \iff x \geqslant \dfrac{5}{3}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{4}x < 3 \iff \dfrac{1}{4}x \times 4 < 3 \times 4 \iff x < 12$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-5x \leqslant 2 \iff \dfrac{-5x}{-5} \geqslant \dfrac{2}{-5} \iff x \geqslant -\dfrac{2}{5}$.

REMARQUE

La démonstration de ces deux propriétés sera effectuée plus tard dans l'année, dans le chapitre sur les fonctions affines.

2) Définition et vocabulaire

DÉFINITIONS

- Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.
- Une **solution** d'une inéquation d'inconnue x est une valeur de x pour laquelle l'inégalité est vraie.
- **Résoudre dans** $\mathbb{R}$ une inéquation, c'est déterminer toutes ses solutions réelles.

EXEMPLE

$2x - 3 \geqslant 5$ est une inéquation d'inconnue x.

Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les valeurs réelles de x telles que $2x - 3 \geqslant 5$.

-2 est par une exemple une des solutions de cette inéquation.

En effet, si $x = -2$, alors $2x - 3 = 2(-2) - 3 = -4 - 7 = -11$ et $-11 \geqslant 5$.

3) Inéquation du premier degré à une inconnue

DÉFINITION

Une inéquation du premier degré à une inconnue x est une inéquation pouvant se ramener à la forme $ax + b \leqslant 0$, avec a et b des réels (et $a \neq 0$).

EXEMPLES

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x - 4 \geqslant x + 6$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4 + 3x < 5x - 1$.

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$7x + 1 \geqslant 2x - 4$ $\qquad$ $4(2x + 5) \leqslant 3 - 5x$ $\qquad$ $2x - 8 \leqslant -3x - 10$ $\qquad$ $-6x + 1 > 4x + 9$

4) Inéquation produit ou quotient

PROPRIÉTÉ admise

- Le produit ou le quotient de deux nombres réels non nuls et **de même signe** est **positif**.
- Le produit ou le quotient de deux nombres réels non nuls et **de signes contraires** est **négatif**.

EXEMPLES

$-4543,654 \times -6 > 0$ et $654 \times (-34) < 0$.

PROPRIÉTÉ admise

Soient a, b, c et d des réels avec a et c différents de 0.
Pour résoudre une inéquation du type $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$ ou du type $\dfrac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0$, on peut utiliser un tableau de signes.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)(-2x+6) \leqslant 0$.

Pour résoudre ce type d'équation, on commence par déterminer séparément le signe des deux facteurs $(x+1)$ et $(-2x+6)$:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$
  $x+1 \leqslant 0 \iff x \leqslant -1$
  $x+1 = 0 \iff x - 1.$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2x+6 \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -6 \iff x \leqslant 3$
  $-2x+6 \leqslant 0 \iff -2x \leqslant -6 \iff x \geqslant 3$
  $-2x+6 = 0 \iff -2x = -6 \iff x = 3.$

On dresse alors un tableau récapitulatif de ces signes et on utilise la propriété vue au-dessus sur le signe d'un produit de facteurs :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x+1)(-2x+6) \leqslant 0$ sont tous les réels de l'ensemble

$$\boxed{]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[}$$

On peut aussi écrire comme conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)(-2x+6) \leqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[}$$