Seconde – Chapitre 02

ENSEMBLES DE NOMBRES

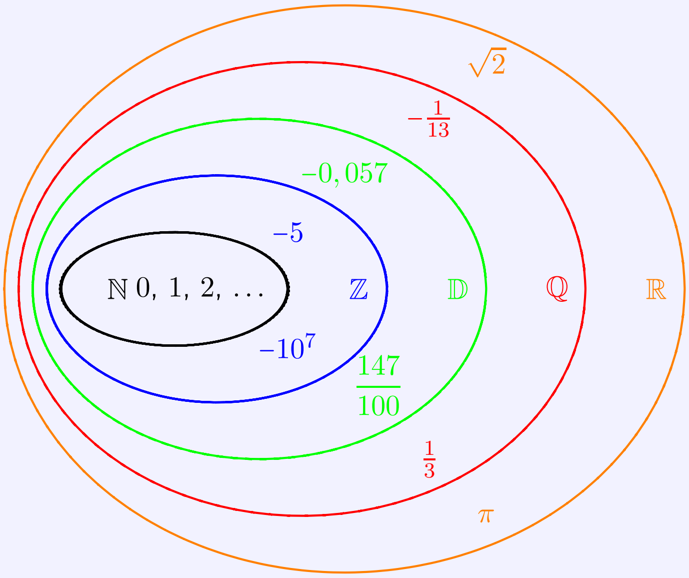


Table des matières

I Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1) Les nombres entiers naturels

DÉFINITION

Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif ou nul.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$: 0 ; 1 ; 2 ; ...

EXEMPLES

$3 \in \mathbb{N}$; $10^3 \in \mathbb{N}$; $-2 \notin \mathbb{N}$; $3,5 \notin \mathbb{N}$

2) Les nombres entiers relatifs

DÉFINITION

Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif, négatif, ou nul.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$: ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...

EXEMPLES

$-4 \in \mathbb{Z}$; $3 \in \mathbb{Z}$ (et aussi $3 \in \mathbb{N}$) ; $-4,5 \notin \mathbb{Z}$

3) Multiples et diviseurs

DÉFINITIONS

Soit a un entier relatif (c'est-à-dire $a \in \mathbb{Z}$) et b un entier naturel (c'est-à-dire $b \in \mathbb{N}$) tel que $b \neq 0$.

• Dire que a est un multiple de b signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.
On dit aussi que b est un diviseur de a ou que a est divisible par b.

• Un nombre pair est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
Un nombre pair est donc un nombre divisible par 2.

• Un nombre impair est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.
Un nombre impair est donc un nombre non divisible par 2.

EXEMPLES

• 15 est un multiple de 5 car $15 = 5 \times 3$. C'est donc aussi un multiple de 3.

On dit aussi que 5 est un diviseur de 15 ou que 15 est divisible par 5.

• 46 est un nombre pair car $46 = 2 \times 23$.

• $37 = 2 \times 18 + 1$ donc 37 est un nombre impair.

PROPRIÉTÉS

- Le carré d'un nombre pair est pair.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

DÉMONSTRATION

- Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre **pair**. Alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$. Donc n^2 est de la forme $2k'$, avec $k' = 2k^2$ un entier naturel.
Donc $\boxed{\text{si } n \text{ est pair, alors } n^2 \text{ est pair également}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre **impair**. Alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.
Ainsi, $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$.
Donc n^2 est de la forme $2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$ un entier naturel.
Donc $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, alors } n^2 \text{ est impair également}}$

4) Critères de divisibilité

PROPRIÉTÉS **admises**

- Un entier naturel est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 4 si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- Un entier naturel est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier naturel est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par 9.

EXERCICE

Compléter le tableau suivant par **oui** ou par **non** :

Nombre	Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 4	Divisible par 5	Divisible par 9
7 275					
8 676					
5 016					
10^4					

5) Nombres premiers

DÉFINITION

Un **nombre premier** est un nombre entier naturel qui a exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

EXEMPLE

Déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 30.

REMARQUE

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur positif : lui-même.

PROPRIÉTÉ admise

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

EXEMPLE

$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = \boxed{2^2 \times 3 \times 5}$

DÉFINITION

On dit que deux entiers relatifs sont **premiers entre eux** si, et seulement si, ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1 (ou -1).

EXEMPLES

- 16 et 5 sont premiers entre eux car les diviseurs de 16 sont 1, 2, 4 et 16, et les diviseurs de 5 sont 1 et 5. Le seul diviseur commun de 16 et 5 est donc bien 1.

- 12 et 8 ne sont pas premiers entre eux car ils ont au moins 2 comme diviseur commun.

PROPRIÉTÉ admise

Soient a et b deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$.

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est dite **irréductible** si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux.

II Les ensembles $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$

1) Les nombres décimaux

DÉFINITION

Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

EXEMPLES

$7,543 \in \mathbb{D}$; $5 \in \mathbb{D}$ (car $5 = 5,0$) ; $\dfrac{3}{4} \in \mathbb{D}$ (car $\dfrac{3}{4} = 0,75$) ; $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (car $\dfrac{1}{3} \approx 0,333...$)

REMARQUE

Un nombre décimal peut toujours s'écrire sous la forme d'une **fraction** dont le dénominateur est une puissance de 10. Par exemple, $7,543 = \dfrac{7543}{1000} = \dfrac{7543}{10^3}$.

2) Les nombres rationnels

DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une **fraction**, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des **entiers relatifs**, et $b \neq 0$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

EXEMPLES

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$; $-5 \in \mathbb{Q}$ (car $-5 = \frac{-5}{1}$) ; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

REMARQUE

Un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction, comme par exemple $\sqrt{2}$, est appelé un **nombre irrationnel**.

3) Deux démonstrations

PROPRIÉTÉ

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

DÉMONSTRATION

On raisonne par l'absurde : supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

Alors il existe un entier relatif a et un entier naturel p tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$.
Alors on aurait $10^p = 3a$. Cette égalité entraîne que 10^p est divisible par 3, ce qui est impossible puisque la somme des chiffres de 10^p est 1 (puisque $10^p = 10....0$).
Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

PROPRIÉTÉ

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

DÉMONSTRATION

On raisonne de nouveau par l'absurde : supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe deux entiers relatifs a et b premiers entre eux, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Ainsi, en élevant cette égalité au carré, on obtient que $2 = \frac{a^2}{b^2}$, soit $a^2 = 2b^2$.
On en déduit alors que a^2 est pair. Donc a est nécessairement pair. En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (propriété démontrée plus haut).
Donc il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$. Ainsi, puisque $a^2 = 2b^2$, alors $(2k)^2 = 2b^2$, donc $4k^2 = 2b^2$, donc $b^2 = 2 \times 2k^2$. Donc b^2 est pair, et pour la même raison qu'au-dessus, on en déduit que b est pair.
Conclusion, a et b sont tous les deux pairs, c'est-à-dire divisibles tous les deux par 2, ce qui est absurde puisqu'ils sont censés être premiers entre eux !
Ainsi, la supposition de départ était fausse, et donc $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

III L'ensemble $\mathbb{R}$

1) Les nombres réels

DÉFINITION

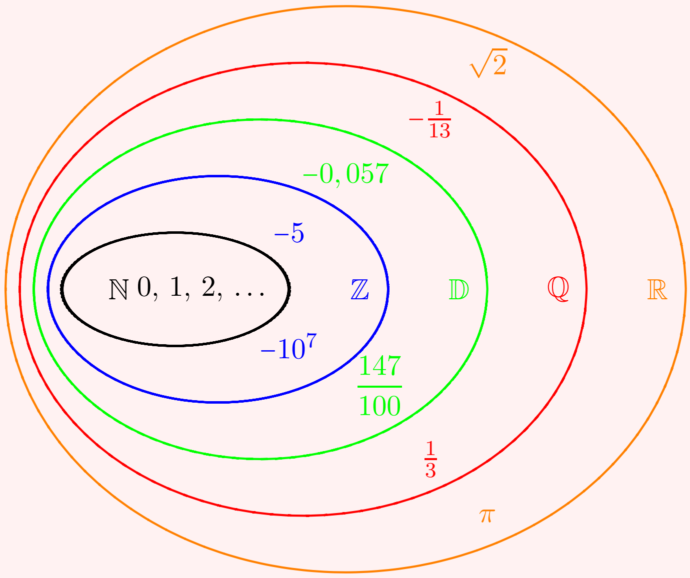
Un **nombre réel** est un nombre rationnel ou irrationnel.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

EXEMPLES

$3 \in \mathbb{R}$; $-6,4 \in \mathbb{R}$; $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{R}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\pi \in \mathbb{R}$

PROPRIÉTÉ admise

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



EXERCICE

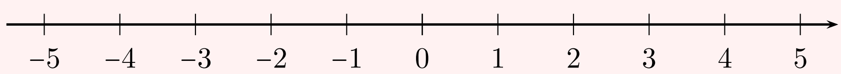
Pour chacun des nombres suivants, déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient :

4 ; $\dfrac{1}{5}$; -5 ; $3,342$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{16}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

2) Droite numérique

PROPRIÉTÉ admise

A tout point d'une droite graduée est associé un unique nombre réel appelé son abscisse.
Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée.
Cette droite est appelée la **droite numérique**.



3) Encadrement d'un réel par deux nombres décimaux

DÉFINITION

Tout nombre réel x peut-être encadré par deux nombres décimaux m et M tels que $m \leqslant x \leqslant M$.
La différence $M - m$ est appelée l'amplitude de l'encadrement.

EXEMPLE

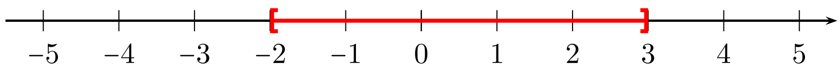
Déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 1, puis un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3}.

IV Intervalles de réels

1) Définition

EXEMPLE

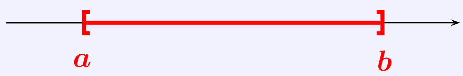
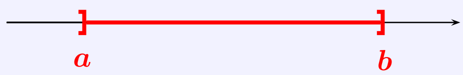
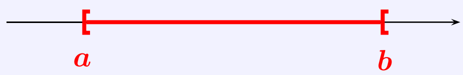
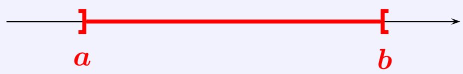
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leqslant x \leqslant 3$ peut se représenter ainsi sur une droite graduée :



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note $[-2\,;5]$.

DÉFINITIONS

Soient a et b deux réels, avec $a < b$.

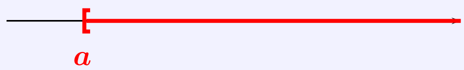
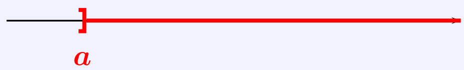
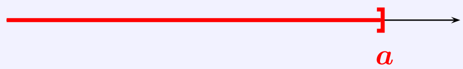
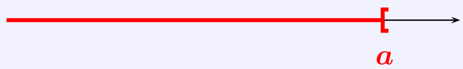
Ensemble des nombres réels x	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x \leqslant b$		$[a\,;b]$
$a < x \leqslant b$		$]a\,;b]$
$a \leqslant x < b$		$[a\,;b[$
$a < x < b$		$]a\,;b[$

REMARQUES

- a et b s'appellent les **bornes** de l'intervalle.
- Le sens des crochets indique si la borne de l'intervalle appartient ou non à l'intervalle. Par exemple, $2 \in [2\,;3[$ mais $3 \notin [2\,;3[$.
On dit que l'intervalle précédent est **ouvert en 3** et **fermé en 2**.

DÉFINITIONS

Soit a un réel.

Ensemble des nombres réels x	**Représentation**	**Intervalle**
$x \geqslant a$		$[a\,;+\infty[$
$x > a$		$]a\,;+\infty[$
$x \leqslant a$		$]-\infty\,;a]$
$x < a$		$]-\infty\,;a[$

REMARQUES

- Les notations $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels.
- Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, les crochets sont toujours ouverts.
- On peut alors noter $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

EXERCICE

- Écrire sous la forme d'un intervalle les encadrements suivants :

$2 \leqslant x \leqslant 6$; $-1 \leqslant x < 6$; $2,5 < x \leqslant 3,14$; $x \geqslant -4$; $x > \dfrac{2}{5}$; $x < \pi$; $x \leqslant 4$

- Soit l'intervalle $I = \left[\dfrac{2}{3}\,;5\right[$.

Les nombres suivants appartiennent-ils à I : 1 ; $\dfrac{1}{2}$; π ; $\dfrac{13}{2}$; 5 ; $\dfrac{2}{3}$; 0.

2) Intersection et réunion

DÉFINITIONS

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Elle se note $A \cap B$.

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B, ou aux deux. Elle se note $A \cup B$.

EXEMPLE

Soit $I = [-1\,;5]$ et $J =]2\,;7]$. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

REMARQUE

Si on pose $I = [2\,;5]$ et $J = [7\,;11]$, alors l'ensemble $I \cap J$ ne contient aucun réel. On dit qu'il s'agit de **l'ensemble vide** et on le note $I \cap J = \varnothing$.

V Valeur absolue

1) Définition et propriétés

DÉFINITION

Soient a et b deux réels.
La distance de a à b est égale à $a-b$ si $a \geqslant b$, et à $b-a$ si $a \leqslant b$.
On la note plus généralement $|a-b|$ (ou $|b-a|$) et on lit : valeur absolue de $a-b$.

REMARQUE

On a donc, pour tous réels a et b, $|a-b| = |b-a|$.

DÉFINITION

La valeur absolue d'un réel x est la distance de ce réel à 0 et est notée $|x|$.

PROPRIÉTÉ admise

Pour tout réel x, on a : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

REMARQUE

Ainsi, pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$.

EXEMPLES

$|4| = 4$; $|-3| = 3$; $|\sqrt{2}+5| = \sqrt{2}+5$; $|\sqrt{2}-3| = -(\sqrt{2}-3) = 3-\sqrt{2}$; $|0| = 0$.

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-4| = 2$.

PROPRIÉTÉ

Soient a et r deux réels, avec $r \geqslant 0$.

L'intervalle $[a-r\,;a+r]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x-a| \leqslant r$.
On dit que cet intervalle est **centré en** a. a est le **centre** de cet intervalle et r son **rayon**.

DÉMONSTRATION

$|x-a| \leqslant r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r.
Ainsi, $|x-a| \leqslant r$ équivaut à :

	$x-a \leqslant r$ si $x \geqslant a$	ou	$a-x \leqslant r$ si $x \leqslant a$.
c'est-à-dire	$x \leqslant a+r$ si $x \geqslant a$	ou	$a-r \leqslant x$ si $x \leqslant a$.

Ainsi, pour tout réel x, $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $a-r \leqslant x \leqslant a+r$, c'est-à-dire $x \in [a-r\,;a+r]$.

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+5| < 3$.

2) Lien avec la racine carrée

PROPRIÉTÉ admise

Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

EXEMPLE

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$. En effet, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.